令和5年度　一般選抜　1期　【1日目】
数学 I・数学 A 解答例

$\boxed{1}$

(1) $2\sqrt{3}$　(2) $(x-y+3)(x+y-3)$　(3) $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$　(4) $\{1, 3\}$

$\boxed{2}$

(1) ① 解 : $x=-4\pm\sqrt{5}$　② $a<1, a>9$　(2) ① 576 通り　② 480 通り

(3) ① $\dfrac{1}{3}$　② $\dfrac{2}{9}$

$\boxed{3}$

(1) $\triangle$ ABC は正三角形なので，$\triangle$ ABM は $\angle B=60°, \angle M=90°$ の直角三角形である。

よって，$AB=2$ より，$\underline{AM=\sqrt{3}}$ である。

同様に，$DM=\sqrt{3}$ であるから，余弦定理より

$$\cos\theta=\frac{AM^2+DM^2-AD^2}{2AM\cdot DM}=\frac{(\sqrt{3})^2+(\sqrt{3})^2-2^2}{2\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}=\frac{6-4}{6}=\underline{\frac{1}{3}}$$

(2) (1) より，$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{8}{9}}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ である。

よって，$AH=AM\sin\theta=\sqrt{3}\cdot\dfrac{2\sqrt{2}}{3}=\underline{\dfrac{2\sqrt{6}}{3}}$

また，$MH=AM\cos\theta=\sqrt{3}\cdot\dfrac{1}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$$HD=MD-MH=\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

ゆえに，$MH:HD=\dfrac{\sqrt{3}}{3}:\dfrac{2\sqrt{3}}{3}=\underline{1:2}$ となる。

$\boxed{4}$

(1) 平方完成して

$$y = x^2 - 2x + k^2 - 4k + 4 = (x-1)^2 - 1 + k^2 - 4k + 4 = (x-1)^2 + k^2 - 4k + 3$$

よって，グラフの頂点の座標は $\underline{(1, k^2 - 4k + 3)}$

(2) 方程式 $x^2 - 2x + k^2 - 4k + 4 = 0$ の解の判別式は

$$\frac{D}{4} = 1 - (k^2 - 4k + 4) = -k^2 + 4k - 3$$

よって，$-k^2 + 4k - 3 > 0$ を解く。

$$k^2 - 4k + 3 < 0 \quad (k-1)(k-3) < 0 \quad 1 < k < 3$$

より，求める k の範囲は $\underline{1 < k < 3}$

(3) 頂点の y 座標が最小のとき，m の値が最大になる。

よってまず，$1 < k < 3$ の範囲で，$k^2 - 4k + 3$ を最小にする k 値を求める。

$k^2 - 4k + 3 = (k-2)^2 - 4 + 3 = (k-2)^2 - 1$ より，$k = 2$ のとき最小である。

このとき，共有点の x 座標は

$$x^2 - 2x + k^2 - 4k + 4 = x^2 - 2x + 2^2 - 4 \cdot 2 + 4 = x^2 - 2x = x(x-2) = 0$$

を解いて，$x = 0, 2$　　このとき $m = 2 - 0 = 2$ となる。

以上より，<u>$k = 2$ のとき m の値は最大で $m = 2$ となる。</u>

$\boxed{5}$

(1) 1 回目の平均値は 0 であるから，$-1 + a + 2 - 1 + 0 = a = 0$

よって，$\underline{a = 0}$

2 回目の平均も 0 であるから，$3 + b + 0 = 3 + b = 0$ よって，$\underline{b = -3}$

(2) (1) の結果より，各回の分散は

$$\begin{aligned} s_1^2 &= \frac{1}{5}\{(-1-0)^2 + (0-0)^2 + (2-0)^2 + (-1-0)^2 + (0-0)^2\} \\ &= \frac{1+0+4+1+1}{5} = \underline{\frac{6}{5}} \end{aligned}$$

$$s_2^2 = \frac{1}{3}\{(3-0)^2 + (-3-0)^2 + (0-0)^2\} = \frac{9+9+0}{3} = \underline{6}$$

(3) 8 個のデータの平均は 0 なので (2) より，

$$\begin{aligned} s^2 &= \frac{1}{8}\{(-1-0)^2 + (0-0)^2 + (2-0)^2 + (-1-0)^2 + (0-0)^2 \\ &\qquad + (3-0)^2 + (-3-0)^2 + (0-0)^2\} \\ &= \frac{6+18}{8} = \underline{3} \end{aligned}$$

令和５年度　一般選抜　１期　【１日目】
数学 I・数学 A・数学 II・数学 B 解答例

$\boxed{1}$

(1) $2\sqrt{3}$　　(2) 中心が $(2,-3)$，半径が 3 の円

(3) n^2　　(4) $\overline{A \cup B} = \{1, 3\}$

$\boxed{2}$

(1) ① $\cos\theta = \dfrac{3x-y}{\sqrt{10}}$　　② $x = \dfrac{2\sqrt{5}}{5},\ y = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$

(2) ① 576 通り　② 480 通り　　(3) $\log_2 \dfrac{1}{3} < \log_5 2 < \log_2 5 < \log_2 7$

$\boxed{3}$

(1) $\triangle$ ABC は正三角形なので，$\triangle$ ABM は $\angle \mathrm{B} = 60^\circ, \angle \mathrm{M} = 90^\circ$ の直角三角形である。

よって，$\mathrm{AB} = 2$ より，$\underline{\mathrm{AM} = \sqrt{3}}$ である。

同様に，$\mathrm{DM} = \sqrt{3}$ であるから，余弦定理より

$$\cos\theta = \frac{\mathrm{AM}^2 + \mathrm{DM}^2 - \mathrm{AD}^2}{2\mathrm{AM} \cdot \mathrm{DM}} = \frac{(\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3})^2 - 2^2}{2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{6-4}{6} = \underline{\frac{1}{3}}$$

(2) (1) より，$\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{1 - \left(\dfrac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{8}{9}} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ である。

よって，$\mathrm{AH} = \mathrm{AM}\sin\theta = \sqrt{3} \cdot \dfrac{2\sqrt{2}}{3} = \underline{\dfrac{2\sqrt{6}}{3}}$

また，$\mathrm{MH} = \mathrm{AM}\cos\theta = \sqrt{3} \cdot \dfrac{1}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$$\mathrm{HD} = \mathrm{MD} - \mathrm{MH} = \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

ゆえに，$\mathrm{MH} : \mathrm{HD} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} : \dfrac{2\sqrt{3}}{3} = \underline{1:2}$ となる。

$\boxed{4}$

(1) まず，方程式 $x^3-4x^2+5=x^3-11$ を解く。

整理して $4x^2-16=0$　　$x^2-4=0$　　$(x-2)(x+2)=0$

よって，解は $x=-2,2$

$x=-2$ のとき，$y=(-2)^3-11=-19$

$x=2$ のとき，$y=2^3-11=-3$

ゆえに，共有点は $(-2,-19),(2,-3)$ の 2 個である。

(2) $f'(x)=3x^2-8x$　　したがって，$f'(3)=3\cdot 3^2-8\cdot 3=3$

よって，点 A における接線の傾きは 3 である。

$y=3(x-3)-4=3x-13$ と計算して，求める接線の方程式は，$y=3x-13$

次に，$g(x)$ のグラフの接線で，傾きが 3 のものを求める。

$g'(x)=3x^2=3$ を解くと，$x=-1,1$

$x=-1$ のとき，$g(-1)=(-1)^3-11=-12$

ゆえに，点 $(-1,-12)$ における接線の方程式は，$y=3(x+1)-12=3x-9$

$x=1$ のとき，$g(1)=1^3-11=-10$

ゆえに，点 $(1,-10)$ における接線の方程式は，$y=3(x-1)-10=3x-13$

以上より，B の座標は $(1,-10)$

(3) 求める面積 S は

$$
\begin{aligned}
S &= \int_1^2 \left\{x^3-11-(3x-13)\right\}dx+\int_2^3\left\{x^3-4x^2+5-(3x-13)\right\}dx \\
&= \int_1^2 (x^3-3x+2)\,dx+\int_2^3 (x^3-4x^2-3x+18)\,dx \\
&= \int_1^3 (x^3-3x)\,dx-\int_2^3 4x^2\,dx+2(2-1)+18(3-2) \\
&= \left[\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{2}x^2\right]_1^3-\left[\frac{4}{3}x^3\right]_2^3+20 \\
&= \frac{1}{4}(81-1)-\frac{3}{2}(9-1)-\frac{4}{3}(27-8)+20 \\
&= \frac{8}{3}
\end{aligned}
$$

$\boxed{5}$

(1) $Y=3$ となる確率は，$\dfrac{4}{35}+\dfrac{3}{35}=\dfrac{7}{35}=\dfrac{1}{5}$

よって，このとき $Z=0$ である条件付き確率は，$\dfrac{3}{35}\div\dfrac{1}{5}=\underline{\dfrac{3}{7}}$

(2) Y と Z の確率分布は次の表で表される。

Y	1	2	3	4	5	計
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	1

Z	1	0	計
P	$\frac{4}{7}$	$\frac{3}{7}$	1

よって，$E(Y)=1\cdot\dfrac{1}{5}+2\cdot\dfrac{1}{5}+3\cdot\dfrac{1}{5}+4\cdot\dfrac{1}{5}+5\cdot\dfrac{1}{5}=\underline{3}$

また，$E(Z)=1\cdot\dfrac{4}{7}+0\cdot\dfrac{3}{7}=\dfrac{4}{7}$　　$E(Z^2)=1^2\cdot\dfrac{4}{7}+0^2\cdot\dfrac{3}{7}=\dfrac{4}{7}$ より

$$V(Z)=E(Z^2)-\{E(Z)\}^2=\frac{4}{7}-\left(\frac{4}{7}\right)^2=\underline{\frac{12}{49}}$$

(3) このゲームを n 回目実施したときの賞金の期待値は，$10\times\dfrac{4}{7}\times n=\dfrac{40}{7}n$ である。

よって，$\dfrac{40}{7}n>200$ を解くと，$n>35$

ゆえに，<u>36 回以上ゲームを行えばよい。</u>