令和５年度　一般選抜　１期　【２日目】
数学 I・数学 A 解答例

$\boxed{1}$

(1) $5+\sqrt{3}$　(2) $x^5-x^3-x^2+1$　(3) $\dfrac{35}{3}$　(4) 4321 (5)

$\boxed{2}$

(1) $a=-\dfrac{1}{2}, b=1, c=\dfrac{7}{2}$　(2) ① $x<1-\sqrt{3}$　② $x \leqq 1, x>1+\sqrt{3}$

(3) ① $0^\circ<\theta<90^\circ$,　$90^\circ<\theta<180^\circ$　②　b)

$\boxed{3}$

(1) 余弦定理より

$$\begin{aligned}\mathrm{BD}^2 &= \mathrm{BC}^2+\mathrm{DC}^2-2\mathrm{BD}\cdot\mathrm{DC}\cos C\\ &= (4\sqrt{2})^2+(2\sqrt{5})^2-2\cdot 4\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{5}\cdot\frac{\sqrt{10}}{10}\\ &= 32+20-16=36\end{aligned}$$

よって，$\underline{\mathrm{BD}=\sqrt{36}=6}$

(2) $\sin C=\sqrt{1-\left(\dfrac{\sqrt{10}}{10}\right)^2}=\sqrt{\dfrac{90}{100}}=\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$ である。

よって，$\triangle\,\mathrm{BCD}=\dfrac{1}{2}\mathrm{BC}\cdot\mathrm{DC}\sin C=\dfrac{1}{2}\cdot 4\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{5}\cdot\dfrac{3\sqrt{10}}{10}=12$ となる。

次に，点 D から辺 BC に降ろした垂線の足を H とおくと，

$$\mathrm{DH}=\mathrm{DC}\sin C=2\sqrt{5}\cdot\frac{3\sqrt{10}}{10}=3\sqrt{2}$$ である。

よって，$\sin\angle\mathrm{CBD}=\dfrac{\mathrm{DH}}{\mathrm{BD}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{6}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ であるから，$\angle\mathrm{CBD}=45^\circ$ である。

ゆえに，$\angle\mathrm{ABD}=\angle\mathrm{ABC}-\angle\mathrm{CBD}=75^\circ-45^\circ=30^\circ$ となる。

したがって，$\triangle\,\mathrm{ABD}=\dfrac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{DB}\sin 30^\circ=\dfrac{1}{2}\cdot 4\cdot 6\cdot\dfrac{1}{2}=6$ である。

以上より，$\underline{\text{四角形 ABCD の面積}=\triangle\,\mathrm{ABD}+\triangle\,\mathrm{BCD}=6+12=18}$

$\boxed{4}$

(1) 3枚のカードの取り出し方は，全部で ${}_8\mathrm{C}_3 = \dfrac{8\cdot 7\cdot 6}{3\cdot 2\cdot 1} = 56$ 通りある。

事象 A が起こるのは，取り出すカードが $1, 2, 3$ の1通り。よって，$P(A) = \dfrac{1}{56}$

事象 B が起こるのは，取り出すカードの2枚が 7，8 のカードで，

残り1枚は 1〜6 のカードのどれでもよいので，6通りある。よって，$P(B) = \dfrac{6}{56} = \dfrac{3}{28}$

A と B は互いに排反であるから，$P(A\cup B) = P(A) + P(B) = \dfrac{1}{56} + \dfrac{6}{56} = \dfrac{7}{56} = \underline{\dfrac{1}{8}}$ となる。

(2) カードの取り出し方は，全部で

$${}_n\mathrm{C}_4 = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24} \text{ 通り。}$$

事象 C が起こるのは，取り出すカードの2枚が 1，2 のカードで，

残り2枚は 3〜n の $n-2$ 枚カードの中から取り出すので，

$${}_{n-2}\mathrm{C}_2 = \frac{(n-2)(n-3)}{2\cdot 1} = \frac{(n-2)(n-3)}{2} \text{ 通りある。}$$

よって，$P(C) = \dfrac{(n-2)(n-3)}{2}\cdot\dfrac{24}{n(n-1)(n-2)(n-3)} = \underline{\dfrac{12}{n(n-1)}}$

(3) (2) より $P(C) = \dfrac{12}{n(n-1)} \geqq \dfrac{1}{50}$ とおくと，$n(n-1) \leqq 600$ となる。

$25\times 24 = 600$ であるので，上の式を満たす <u>n の最大値は 25 である</u>。

$\boxed{5}$

(1)

$$r_{XX} = \frac{\frac{1}{N}\left\{(x_1-\overline{x})(x_1-\overline{x})+\cdots+(x_N-\overline{x})(x_N-\overline{x})\right\}}{\sqrt{\frac{1}{N}\left\{(x_1-\overline{x})^2+\cdots+(x_N-\overline{x})^2\right\}}\sqrt{\frac{1}{N}\left\{(x_1-\overline{x})^2+\cdots+(x_N-\overline{x})^2\right\}}}$$

$$= \frac{\frac{1}{N}\left\{(x_1-\overline{x})^2+\cdots+(x_N-\overline{x})^2\right\}}{\frac{1}{N}\left\{(x_1-\overline{x})^2+\cdots+(x_N-\overline{x})^2\right\}}$$

$$= \underline{1}$$

(2) $\overline{y}=\dfrac{1}{N}(px_1+\cdots+px_N)=\dfrac{p}{N}(x_1+\cdots+x_N)=p\overline{x}$ となる。よって，

$$r_{XY} = \frac{\frac{1}{N}\left\{(x_1-\overline{x})(px_1-p\overline{x})+\cdots+(x_N-\overline{x})(px_N-p\overline{x})\right\}}{\sqrt{\frac{1}{N}\left\{(x_1-\overline{x})^2+\cdots+(x_N-\overline{x})^2\right\}}\sqrt{\frac{1}{N}\left\{(px_1-p\overline{x})^2+\cdots+(px_N-p\overline{x})^2\right\}}}$$

$$= \frac{\frac{p}{N}\left\{(x_1-\overline{x})^2+\cdots+(x_N-\overline{x})^2\right\}}{\frac{p}{N}\left\{(x_1-\overline{x})^2+\cdots+(x_N-\overline{x})^2\right\}}$$

$$= \underline{1}$$

(3) $\overline{z}=\dfrac{1}{N}\{(ay_1+b)+\cdots+(ay_N+b)\}=\dfrac{1}{N}\{a(y_1+\cdots+y_N)+Nb\}=a\overline{y}+b$ となる。

よって，$z_i-\overline{z}=ay_i+b-(a\overline{y}+b)=a(y_i-\overline{y})\quad(i=1,\ldots,N)$ である。ゆえに

$$r_{XZ} = \frac{\frac{1}{N}\left[(x_1-\overline{x})\{a(y_1-\overline{y})\}+\cdots+(x_N-\overline{x})\{a(y_N-\overline{y})\}\right]}{\sqrt{\frac{1}{N}\left\{(x_1-\overline{x})^2+\cdots+(x_N-\overline{x})^2\right\}}\sqrt{\frac{1}{N}\left[\{a(y_1-\overline{y})\}^2+\cdots+\{a(y_N-\overline{y})\}^2\right]}}$$

$$= \frac{a\cdot\frac{1}{N}\left\{(x_1-\overline{x})(y_1-\overline{y})+\cdots+(x_N-\overline{x})(y_N-\overline{y})\right\}}{\sqrt{a^2}\sqrt{\frac{1}{N}\left\{(x_1-\overline{x})^2+\cdots+(x_N-\overline{x})^2\right\}}\sqrt{\frac{1}{N}\left\{(y_1-\overline{y})^2+\cdots+(y_N-\overline{y})^2\right\}}}$$

$$= \frac{a}{\sqrt{a^2}}r_{XY}$$

ここで，$a<0$ より $\sqrt{a^2}=-a$ である。

したがって，$r_{XZ}=\dfrac{a}{\sqrt{a^2}}r_{XY}=\dfrac{a}{-a}r_{XY}=-r_{XY}$ となる。

令和５年度　一般選抜　１期　【２日目】

数学 I・数学 A・数学 II・数学 B 解答例

$\boxed{1}$

(1) $5+\sqrt{3}$　　(2) $(3,\ 5)$　　(3) $x=-2$　　(4) $\dfrac{a^2}{bc}=8$

$\boxed{2}$

(1) $\dfrac{9}{2}$　　(2) ① 60 個　② 2410

(3) ① $a_n = 3n+2$　② 項の個数：34 個　和：5117

$\boxed{3}$

(1) 余弦定理より

$$\begin{aligned}\mathrm{BD}^2 &= \mathrm{BC}^2+\mathrm{DC}^2-2\mathrm{BD}\cdot\mathrm{DC}\cos C\\ &= (4\sqrt{2})^2+(2\sqrt{5})^2-2\cdot4\sqrt{2}\cdot2\sqrt{5}\cdot\frac{\sqrt{10}}{10}\\ &= 32+20-16=36\end{aligned}$$

よって，$\underline{\mathrm{BD}=\sqrt{36}=6}$

(2) $\sin C=\sqrt{1-\left(\dfrac{\sqrt{10}}{10}\right)^2}=\sqrt{\dfrac{90}{100}}=\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$ である。

よって，$\triangle\,\mathrm{BCD}=\dfrac{1}{2}\mathrm{BC}\cdot\mathrm{DC}\sin C=\dfrac{1}{2}\cdot4\sqrt{2}\cdot2\sqrt{5}\cdot\dfrac{3\sqrt{10}}{10}=12$ となる。

次に，点 D から辺 BC に降ろした垂線の足を H とおくと，

$$\mathrm{DH}=\mathrm{DC}\sin C=2\sqrt{5}\cdot\frac{3\sqrt{10}}{10}=3\sqrt{2}$$ である。

よって，$\sin\angle\mathrm{CBD}=\dfrac{\mathrm{DH}}{\mathrm{BD}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{6}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ であるから，$\angle\mathrm{CBD}=45^\circ$ である。

ゆえに，$\angle\mathrm{ABD}=\angle\mathrm{ABC}-\angle\mathrm{CBD}=75^\circ-45^\circ=30^\circ$ となる。

したがって，$\triangle\,\mathrm{ABD}=\dfrac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{DB}\sin30^\circ=\dfrac{1}{2}\cdot4\cdot6\cdot\dfrac{1}{2}=6$ である。

以上より，$\underline{\text{四角形 ABCD の面積}=\triangle\,\mathrm{ABD}+\triangle\,\mathrm{BCD}=6+12=18}$

$\boxed{4}$

(1) ・直線 $y=3x+12$ と直線 $10=x+2y$ $\left(y=-\dfrac{1}{2}x+5\right)$ の交点を A とおくと，

A の座標は $(-2, 6)$ である。

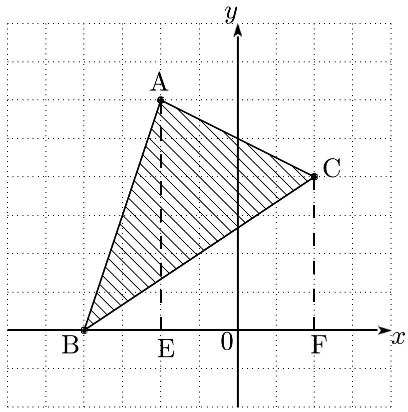
・直線 $y=3x+12$ と直線 $3y=2x+8$ $\left(y=\dfrac{2}{3}x+\dfrac{8}{3}\right)$ の交点を B とおくと，

B の座標は $(-4, 0)$ である。

・直線 $10=x+2y$ と直線 $3y=2x+8$ の交点を C とおくと，C の座標は $(2, 4)$ である。

求める領域 D は図の斜線部分（三角形 ABC)。

境界を含む。



(2) x 軸上に，点 E $(-2, 0)$ と点 F $(2, 0)$ をとる。

$$
\begin{aligned}
\text{領域 } D \text{ の面積} &= \triangle\,\mathrm{ABE}\text{ の面積}+\text{台形 AEFC の面積}-\triangle\,\mathrm{BFC}\text{ の面積} \\
&= \frac{1}{2}\times 2\times 6+\frac{1}{2}\times(4+6)\times 4-\frac{1}{2}\times 6\times 4 \\
&= 6+20-12=\underline{14}
\end{aligned}
$$

(3) 中心が原点 O で，点 P を通る円 G を考える。

この円 G の半径を r とすると，$x^2+y^2=r^2$ であるから，r の最大値と最小値を考えれば良い。

OA$=\sqrt{(-2)^2+6^2}=\sqrt{40}$，OB$=4=\sqrt{16}$，OC$=\sqrt{2^2+4^2}=\sqrt{20}$ であるので，

点 P が点 A の位置にあるとき r は最大である。

よって，このとき x^2+y^2 も最大で，最大値は $(\sqrt{40})^2=\underline{40}$ である。

また，r が最小になるのは，円 G が直線 BC と接するときである。

このときの r の値は，原点と直線 BC の距離に等しい。

直線 BC の方程式は $2x-3y+8=0$ となるので，距離は $\dfrac{|2\cdot 0-3\cdot 0+8|}{\sqrt{2^2+(-3)^2}}=\dfrac{8}{\sqrt{13}}$ である。

よって，x^2+y^2 の最小値は $\left(\dfrac{8}{\sqrt{13}}\right)^2=\underline{\dfrac{64}{13}}$ である。

$\boxed{5}$

(1) $E(Z) = \underline{tE(X) + (1-t)E(Y)}$

(2) (1) より

$$\begin{aligned}
V(Z) &= E(Z^2) - \{E(Z)\}^2 \\
&= E(t^2X^2 + 2t(1-t)XY + (1-t)^2Y^2) - \{tE(X) + (1-t)E(Y)\}^2 \\
&= t^2E(X^2) + 2t(t-1)E(XY) + (1-t)^2E(Y^2) \\
&\qquad -t^2\{E(X)\}^2 - 2t(1-t)E(X)E(Y) - (1-t)^2\{E(Y)\}^2 \\
&= t^2E(X^2) - t^2\{E(X)\}^2 + \{2t(t-1)E(XY) - 2t(1-t)E(X)E(Y)\} \\
&\qquad +(1-t)^2E(Y^2) - (1-t)^2\{E(Y)\}^2 \\
&= t^2V(X) + 2t(t-1)\{E(XY) - E(X)E(Y)\} + (1-t)^2V(Y)
\end{aligned}$$

ここで，X と Y が独立であるから，$E(XY) = E(X)E(Y)$ である。

よって，$V(Z) = \underline{t^2V(X) + (1-t)^2V(Y)}$

(3) (2) の結果を t の 2 次関数とみて整理して，平方完成すると

$$\begin{aligned}
V(Z) &= \{V(X) + V(Y)\}t^2 - 2V(Y)t + V(Y) \\
&= \{V(X) + V(Y)\}\left\{t - \frac{V(Y)}{V(X) + V(Y)}\right\}^2 - \frac{\{V(Y)\}^2}{V(X) + V(Y)} + V(Y) \\
&= \{V(X) + V(Y)\}\left\{t - \frac{V(Y)}{V(X) + V(Y)}\right\}^2 + \frac{V(X)V(Y)}{V(X) + V(Y)}
\end{aligned}$$

よって，$V(Z)$ は，$\underline{\ t = \frac{V(Y)}{V(X) + V(Y)}}$ <u>のとき最小で，最小値は</u> $\underline{\frac{V(X)V(Y)}{V(X) + V(Y)}}$ となる。