令和３年度一般選抜問題１期（１日目）解答
数学 I・数学 A，数学 I・数学 A・数学 II・数学 B

以下に解答を書きます．複数の解答が書かれている問題もありますが，ここに書いていない議論からも解答が得られることがあります．数学では解答への道筋は１通りではないことが多々あります．

$\boxed{1}$

(1)
$$
\begin{aligned}
&-4x^2+4x+9y^2-1\\
&=9y^2-\left(4x^2-4x+1\right)=(3y)^2-(2x-1)^2\\
&=(3y+2x-1)(3y-(2x-1))\\
&=(2x+3y-1)(-2x+3y+1)
\end{aligned}
$$

なお $-(2x+3y-1)(2x-3y-1)$，$(3y+2x-1)(3y-2x+1)$ なども正解です．

(2)

$2x-3 \ < \ 5x+3$	$9x-10 \ \leqq \ 3x+1$
$-6 \ < \ 3x$	$6x \ \leqq \ 11$
$-2 \ < \ x$	$x \ \leqq \ \dfrac{11}{6}$

であるから，$-2<x\leqq\dfrac{11}{6}$ を得ます．

(3) 仮定 AB = BC，$\angle$ B = 90° ですから，$\angle$ CAB = $\angle$ ACB = 45° です．よって AB = BC = AD = a とおくと，余弦定理より $\triangle$ ABD において

$$(\mathrm{BD})^2=(\mathrm{AD})^2+(\mathrm{AB})^2-2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AD}\cos\angle\mathrm{DAB}=a^2+a^2-2a^2\frac{\sqrt{2}}{2}=\left(2-\sqrt{2}\right)a^2$$

が成立します．よって $(\mathrm{BE})^2=\left(\dfrac{\mathrm{BD}}{2}\right)^2=\dfrac{(\mathrm{BD})^2}{4}=\dfrac{2-\sqrt{2}}{4}a^2$ です．直角三角形 ABE において

$$\sin^2\angle\mathrm{BAE} \ = \ \frac{(\mathrm{BE})^2}{(\mathrm{AB})^2} \ = \ \frac{\frac{2-\sqrt{2}}{4}a^2}{a^2}=\frac{2-\sqrt{2}}{4}$$

を得ます．よって，次の値が得られます．

$$\cos^2\angle\mathrm{BAE} \ = \ 1-\sin^2\angle\mathrm{BAE} \ = \ 1-\frac{2-\sqrt{2}}{4} \ = \ \frac{2+\sqrt{2}}{4}$$

(4) ユークリッドの互除法を使います.

$$\begin{aligned}
2475 &= 1078\times 2+319\\
1078 &= 319\times 3+121\\
319 &= 121\times 2+77\\
121 &= 77\times 1+44\\
77 &= 44\times 1+33\\
44 &= 33\times 1+11\\
33 &= 11\times 3
\end{aligned}$$

よって，最大公約数は 11 です.

(5)

$$\begin{array}{rr}
 & 1101_{(2)}\\
+ & 1010_{(2)}\\ \hline
 & 10111_{(2)}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rr}
 & 1101_{(2)}\\
\times & 1010_{(2)}\\ \hline
 & 1101_{(2)}\\
 & 1101_{(2)}\\ \hline
 & 10000010_{(2)}
\end{array}$$

よって $a+b=10111_{(2)}$，$ab=10000010_{(2)}$ です.

なお $a=1\times 2^3+1\times 2^2+0\times 2^1+1\times 2^0=13_{(10)}$，$b=1\times 2^3+0\times 2^2+1\times 2^1+0\times 2^0=10_{(10)}$ ですから,

$$a+b=23_{(10)}=10111_{(2)},\quad ab=130_{(10)}=10000010_{(2)}$$

でも計算出来ます.

2

(1) 箱 X から球 a を取り出す確率ですから，$P_A(B)=\dfrac{3}{9}=\dfrac{1}{3}$ です.

(2) $P_A(B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}$ ですから

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P_A(B)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$$

です.

(3) $B=(A\cap B)\cup\left(\overline{A}\cap B\right)$ であり，事象 $A\cap B$ と事象 $\overline{A}\cap B$ は排反事象です．よって

$$P(B)\ =\ P\left(A\cap B\right)+P\left(\overline{A}\cap B\right)=P(A)\cdot P_A(B)+P\left(\overline{A}\right)\cdot P_{\overline{A}}(B)$$

です．一方

$$P\left(\overline{A}\right)=1-P(A)=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3},\quad P_{\overline{A}}(B)=\frac{1}{9}$$

です．よって

$$P(B)\ =\ P(A)\cdot P_A(B)+P\left(\overline{A}\right)\cdot P_{\overline{A}}(B)\ =\ \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\ +\ \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{9}\ =\ \frac{5}{27}$$

を得ます．

3

$f(x)=x^2+2x+3=(x+1)^2+2$ です．よって，$t \geqq -1$ のときは，$-1 \leqq t \leqq x \leqq t+a$ では，$f(t) \leqq f(x) \leqq f(t+a)$ です．よって $f(x)$ は $x=t$ で最小値をとります．即ち $f(t)$ が最小値です．

$t<-1$ の場合を考えます．

- $t<-1<t+a$ を満たすとき，即ち $-1-a<t<-1$ のときは，$t<-1<t+a$ ですから，$t \leqq x \leqq t+a$ での最小値は $x=-1$ のときで，$f(-1)=2 \neq f(t)$ です．一方，最大値が $f(t)$ となるのは $f(t) \geqq f(t+a)$ の場合です．

  $$f(t) \geqq f(t+a)\ \Longleftrightarrow\ (t+1)^2+2\ \geqq\ (t+a+1)^2+2\ \Longleftrightarrow\ t \leqq -\frac{a}{2}-1$$

  です．仮定 $a>0$ から $-1-a<-1-\dfrac{a}{2}$ ですから，$f(t)$ が最大値となるのは $-1-a<t \leqq -1-\dfrac{a}{2}$ の場合です．
- $t+a \leqq -1$ を満たすとき，即ち $t \leqq -1-a$ のときは，$t \leqq x \leqq t+a \leqq -1$ では，$f(t) \geqq f(x) \geqq f(t+a)$ です．よって $f(x)$ は $x=t$ で最大値をとります．即ち $f(t)$ が最大値です．

以上の計算から，$f(t)$ が最大値または最小値になるのは，$t \leqq -1-\dfrac{a}{2}$ または $-1 \leqq t$ の場合です．

なお，次の様に計算しても良いです．$f(t)$ が最小値でも最大値でもない場合は，$t<-1<t+a$ かつ $f(t)<f(t+a)$ を満たす場合です．

$$f(t)<f(t+a)\ \Longleftrightarrow\ (t+1)^2+2\ <\ (t+a+1)^2+2\ \Longleftrightarrow\ t>-\frac{a}{2}-1$$

から，$-1-\dfrac{a}{2}<t \leqq -1$ を得ることが出来ます．よって $f(t)$ が最大値または最小値になるのは，$t \leqq -1-\dfrac{a}{2}$ または $-1 \leqq t$ の場合です．

4

(1) $\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt = 4x^3-3x^2+x-\int_0^1 f(t)\,dt$ の両辺を微分します．$\displaystyle\left(\int_a^x f(t)\,dt\right)' = f(x)$ であり，$\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt$ は定数ですから

$$f(x) = 12x^2 - 6x + 1$$

を得ます．

(2) (1) より

$$\int_0^1 f(t)\,dt = \int_0^1 \left(12t^2 - 6t + 1\right)\,dt = \left[4t^3 - 3t^2 + t\right]_0^1 = 2$$

を得ます．

(3) (2) より $\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt = 4x^3 - 3x^2 + x - 2$ ですから，両辺に $x = a$ を代入すると

$$0 = 4a^3 - 3a^2 + a - 2 = (a-1)(4a^2+a+2) = (a-1)\left\{4\left(a+\frac{1}{8}\right)^2 + \frac{31}{16}\right\}$$

です．よって $a = 1$ を得ます．

5

(1) 加法定理より

$$3\sin\theta - 4\cos\theta = A\left(\cos\theta\cos\alpha - \sin\theta\sin\alpha\right)$$

です．よって

$$\sin\alpha = -\frac{3}{A}, \quad \cos\alpha = -\frac{4}{A}$$

です．一方

$$1 = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = \frac{9}{A^2} + \frac{16}{A^2} \quad \Rightarrow \quad A^2 = 25$$

よって $A > 0$ より $A = 5$ です．

(2) 底の変換公式より，$\log_4 3 = \dfrac{\log_2 3}{\log_2 4} = \dfrac{1}{2}\log_2 3 = \log_2\sqrt{3}$ ですから，$2^{\log_4 3} = 2^{\log_2\sqrt{3}} = \sqrt{3}$ です．

よって $\tan\theta = \sqrt{3}$ かつ $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ より，$\theta = \dfrac{\pi}{3}$，$\dfrac{4\pi}{3}$ です．