令和 4 年度 一般入学試験問題 1 期 【1 日目】数学解答

$\boxed{1}$

(1)

$$\begin{aligned}&(x-2)(x+3)(x-4)(x+5)\\&\quad=(x^2+x-6)(x^2+x-20)=(x^2+x)^2-26(x^2+x)+120\\&\quad=x^4+2x^3-25x^2-26x+120\end{aligned}$$

(2)

1 を含まないとき： ${}_4C_2=6$ 通り
1 を 1 つ含むとき： ${}_4C_2\times 2!\times 2=24$ 通り
1 を 2 つ含むとき： ${}_4C_2\times 2\ +\ {}_4C_2\times 2!=24$ 通り
1 を 3 つ含むとき： ${}_4C_1\times 2=8$ 通り
よって，62 通りである。

(3)　$1024=2^{10}$ であるから，求める自然数は「 $2^k\times$ 奇数 」という形である。ただし k は，10 以上の自然数である。

一方 $2=2^1$，$4=2^2$，$6=2^1\times 3$，$8=2^3$，$10=2^1\times 5$，$12=2^2\times 3$ であるので，$12!=2^{10}\times$ 奇数 となり「 $2^k\times$ 奇数 」となる最小の自然数である。よって $n=12$ である。

(4)　余弦定理より $6^2=5^2+x^2-10x\cos 45^\circ=x^2-5\sqrt{2}x+25$ を満たす。よって $x^2-5\sqrt{2}x-11=0$ を解くと $x=\dfrac{5\sqrt{2}+\sqrt{94}}{2}$ を得る。ここで $x>0$ を使った。よって

$$S=\frac{5x}{2}\sin 45^\circ=\frac{25+5\sqrt{47}}{4}$$

を得る。

(5)　題意より，2 次方程式 $f(x)=ax^2+2ax-3=0$ は，相異なる 2 つの実数解を持つので，判別式は正である。よって

$$a^2+3a>0\quad\Rightarrow\quad a<-3 \text{ または } 0<a$$

一方 $f(-2)=-3<0$ であるから，$-2\leqq\alpha<\beta<1$ が成立するためには $a<0$ である必要がある。よって，$a>0$ は不適である。

さて $a<-3$ のときは，$-2\leqq\alpha<\beta<1$ が成立するためには，$f(1)<0$ であればよい。$f(1)=3a-3<0$ であるから，求める定数 a は $a<-3$ を満たせば良いことが分かる。

以上から $a < -3$ を得る。

2

(1)　仮定より $\tan^2\alpha = \dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \dfrac{1-\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \dfrac{\frac{1}{10}}{\frac{9}{10}} = \dfrac{1}{9}$ であり，$\tan\alpha > 0$ より $\tan\alpha = \dfrac{1}{3}$ である。

同様に仮定より $\tan^2\beta = \dfrac{\sin^2\beta}{\cos^2\beta} = \dfrac{\sin^2\beta}{1-\sin^2\beta} = \dfrac{\frac{9}{10}}{\frac{1}{10}} = 9$ であり，$\tan\beta > 0$ より $\tan\beta = 3$ である。

(2)　(1) より

$$\tan\alpha = \frac{h}{1+y} \quad \Rightarrow \quad \frac{h}{1+y} = \frac{1}{3}, \quad \tan\beta = \frac{h}{y} \quad \Rightarrow \quad \frac{h}{y} = 3$$

であるので，$y = \dfrac{1}{8}$，$h = \dfrac{3}{8}$ である。さらに $x = \dfrac{1+y}{\cos\alpha} = \dfrac{3}{8}\cdot\sqrt{10}$ である。以上より

$$x = \frac{3\sqrt{10}}{8}, \quad y = \frac{1}{8}, \quad h = \frac{3}{8}$$

3

(1)　対偶を証明する。整数 n に対し「n が偶数ならば n^2+1 は奇数である」を示せば良い。$n = 2k$ とおく。ただし k は整数である。このとき $n^2+1 = 4k^2+1 =$ 偶数 $+1$ であるから，n^2+1 は奇数である。以上で証明された。

(2)　対偶を証明する。「$x \in Q$ ならば $x^2 \in Q$」を示せば良い。$x \in Q$ とすると，Q の定義から $x = \dfrac{n}{m}$ を満たす整数 m と n が存在する。ただし m は 0 ではない。このとき，n^2 は整数かつ m^2 は 0 ではない整数だから $x^2 = \dfrac{n^2}{m^2} \in Q$ を得る。以上で証明された。

4

(1)　$f'(x) = x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1)$ なので，$f(x)$ の増減表は

x	$x < -1$	-1	$-1 < x < 2$	2	$2 < x$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

となるから，$x = 2$ のとき最小値 $f(2)$ をとる。よって

$$m = f(2) = \int_a^2 \left(t^2 - t - 2\right)\, dt = -\frac{1}{3}a^3 + \frac{1}{2}a^2 + 2a - \frac{10}{3}$$

(2)　$m' = -a^2 + a + 2 = -(a-2)(a+1)$ であるから，$-1 \leqq a \leqq 2$ での増減表は

a	-1	$-1 < a < 2$	2
m'	0	$+$	0
m	$-\frac{9}{2}$	$\nearrow$	0

である。よって $a = -1$ のとき最小値 $m = -\dfrac{9}{2}$ をとり，$a = 0$ のとき最大値 $m = 0$ をとる。

5

(1)　円の方程式を $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ とおく。円は $(0,0)$，$(2p,0)$，$(0,4q)$ を通るから，

$$c = 0, \quad a = -2p, \quad b = -4q$$

である。よって円の方程式は

$$(x-p)^2 + (y-2q)^2 = p^2 + 4q^2$$

である。よって S の座標は $(p, 2q)$ であり，半径は $r = \sqrt{p^2 + 4q^2}$ である。なお $r^2 = p^2 + 4q^2 \geq p^2 + q^2 > 0$ なので半径は 0 ではない。

(2)　2 点 P と Q を結ぶ直線の方程式は $y = -\dfrac{4q}{2p}(x - 2p)$ である。S の座標 $x = p$ を代入すると $y = 2q$ を得るので，点 S は，この直線上にある事が示された。

なお，円 C に内接する三角形 POQ において，$\angle\mathrm{POQ} = 90^\circ$ である事より，線分 PQ が円 C の直径となる事を利用しても解答を得られます。