令和 4 年度 一般入学試験問題 1 期 【2 日目】数学解答

1

(1)　$x^2+ax+2022=(x+m)(x+n)=x^2+(m+n)x+mn$ であるから，$a=m+n$, $mn=2022=2\cdot3\cdot337$ である。m と n は整数であるから，その組あわせは

$(m,n)=(\pm1,\pm2022)$，$(\pm2,\pm1011)$．$(\pm3,\pm674)$．$(\pm6,\pm337)$ である。ただし復号同順である。よって

$$a=\pm2023,\quad \pm1013,\quad \pm677,\quad \pm343$$

を得る。

(2)　5 人の球の出し方は 20^5 通りである。一方 5 人がすべて異なる自然数の球を取り出し方は $20\cdot19\cdot18\cdot17\cdot16$ 通りである。よって確率は

$$\frac{20\cdot19\cdot18\cdot17\cdot16}{20^5}=\frac{2907}{5000}$$

(3)　題意より放物線の方程式は $y=a(x+4)^2+6$ と書ける。この放物線が $(12,4)$ を通るので $4=a\cdot16^2+6$ より $a=-\frac{2}{16^2}=-\frac{1}{128}$ である。よって G の方程式は，$y=-\frac{1}{128}(x+4)^2+6$ である。

(4)　$A=\{4m|1\leqq4m\leqq100,\, m$ は整数 $\}$ である。よって

$$4m\in A \iff 1\leqq4m\leqq100 \iff \frac{1}{4}\leqq m\leqq25$$

であるから $n(A)=25-1+1=25$ である。一方 $B=\{3m+2|1\leqq3m+2\leqq100,\, m$ は整数 $\}$ である。よって

$$3m+2\in B \iff 1\leqq3m+2\leqq100 \iff -\frac{1}{3}\leqq m\leqq32+\frac{2}{3}$$

であるから $n(B)=32-0+1=33$ である。また $A\cap B=\{8,20,32,44,56,68,80,92\}$ である。よって

$$n\left(A\cup B\right)=n\left(A\right)+n\left(B\right)n-\left(A\cap B\right)=25+33-8=50$$

を得る。

(5)　辺の長さが 3 と 6 がなす角を x とおく。余弦定理より

$$\cos x=\frac{6^2+3^2-5^2}{2\cdot3\cdot6}=\frac{5}{9}$$

である。よって $\sin x > 0$ であるから $\sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x} = \dfrac{2\sqrt{14}}{9}$ である。これより

$$S = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 6 \cdot \sin x = 9 \cdot \frac{2\sqrt{14}}{9} = 2\sqrt{14}$$

である。一方 $S = \dfrac{3+5+6}{2} r$ であるので，$r = \dfrac{2\sqrt{14}}{7}$ である。

$\boxed{\mathbf{2}}$

(1)　$a = 3k$，$b = 7k$ とおく。ただし k は正の整数である。a と b の最小公倍数は $21k$ である。よって $21k = 483$ より，$k = 23$ である。よって $a = 3 \cdot 23$ と $b = 7 \cdot 23$ の最大公約数は 23 である。

(2)　$a = 3 \cdot 23 = 69$，$b = 7 \cdot 23 = 161$ である。

$\boxed{\mathbf{3}}$

(1)　a，b，c の平均値が 0 であるから，$a + b + c = 0$ である。一方，分散が 2 であるから，$2 = \dfrac{1}{3}\left((a-0)^2 + (b-0)^2 + (c-0)^2\right) = \dfrac{1}{3}\left(a^2 + b^2 + c^2\right)$ である。よって $a^2 + b^2 + c^2 = 6$ を得る。。

(2)　方程式 $f(x) = 0$ が重解をもつので，判別式は 0 である。よって $b = -a - c$ を使うと

$$0 = b^2 - 4ac = (-a-c)^2 - 4ac = a^2 - 2ac + c^2 = (a-c)^2$$

よって，$c = a$ かつ $b = -2a$ である。一方 $a^2 + b^2 + c^2 = 6$ であったので

$$6 = a^2 + 4a^2 + a^2 = 6a^2 \quad \Rightarrow \quad a = \pm 1$$

を得るが，$a > 0$ なので $a = 1$，$b = -2$，$c = 1$ である。このとき $0 = ax^2 + bx + c = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$ であるから，重解は $x = 1$ である。

4

(1)　条件 $(a+b)^x=3$ より $x\neq 0$ である。一方，$(a-b)^x=1$ と $(2a-3b)^x=1$ かつ $x\neq 0$ であるから，$a-b=1$ かつ $2a-3b=1$ でなくてはいけない。よって $a=2$，$b=1$ である。よって $(a+b)^x=3^x=3$ であるから，$x=1$ を得る。

以上で $a=2$，$b=1$，$x=1$ を得る。

(2)　$X=\log_{25}x$ とおくと，底の変換より

$$\begin{aligned} f(x) &= 2\left(\log_{25}x\right)^2-6\log_5 x+7=2X^2-6\cdot\frac{\log_{25}x}{\log_{25}5}+7 \\ &= 2X^2-12X+7=2(X-3)^2-11 \end{aligned}$$

であるから，$X=\log_{25}x=3$ のとき最小値 $m=-11$ をとる。

5

(1)　$F'(x)=x^2-2x-3=(x-3)(x+1)$ であるから，$F(x)$ の増減表は

x	$x<-1$	-1	$-1<x<3$	3	$3<x$
$F'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$F(x)$	$\nearrow$	$\frac{32}{3}$	$\searrow$	0	$\nearrow$

なお $F(-1)=\displaystyle\int_3^{-1}(t^2-2t-3)dt=\frac{32}{3}$，$F(3)=\displaystyle\int_3^3(t^2-2t-3)dt=0$ である。

(2)　xy 平面上の 2 点 $(0,3)$ と $(4,5)$ を通る直線 l の方程式は，$y=\dfrac{1}{2}x+3$ である。l と放物線 $y=f(x)$ の交点は

$$x^2-2x-3=\frac{1}{2}x+3 \iff (2x+3)(x-4)=0 \iff x=-\frac{3}{2},\ 4$$

であるから，面積 S は

$$S=\int_{-\frac{3}{2}}^{4}\left(\frac{1}{2}x+3-(x^2-2x-3)\right)dx=\frac{1331}{48}$$

である。