令和 4 年度 一般入学試験問題 2 期 数学解答

1 次の問いに答えなさい。解答欄には答と答を導く過程を書きなさい。（50 点）

(1)

1）1 番目と 2 番目が O となる確率は，$\dfrac{2}{7}\times\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{21}$ である。

2）2 番目と 3 番目が O となる確率は，$\dfrac{5}{7}\times\dfrac{2}{6}\times\dfrac{1}{5}=\dfrac{1}{21}$ である。

3) 3 番目と 4 番目が O となる確率は，$\dfrac{5}{7}\times\dfrac{4}{6}\times\dfrac{2}{5}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{21}$ である。

よって求める確率は $\dfrac{1}{21}+\dfrac{1}{21}+\dfrac{1}{21}=\dfrac{1}{7}$ である。

(2) $7^2=(a+b+c+d)^2=a^2+b^2+c^2+d^2+2(ab+ac+ad+bc+bd+cd)$ であるから

$$49=a^2+b^2+c^2+d^2+10 \quad\Rightarrow\quad a^2+b^2+c^2+d^2=39$$

を得る。

(3)

$$\begin{aligned} a^2-b^2 &= \frac{40}{21+4\sqrt{5}} - \frac{20}{21-4\sqrt{5}} = \frac{40\left(21-4\sqrt{5}\right) - 20\left(21+4\sqrt{5}\right)}{\left(21+4\sqrt{5}\right)\left(21-4\sqrt{5}\right)} \\ &= \frac{420-240\sqrt{5}}{361} \end{aligned}$$

(4) ユークリッドの互除法を使う（計算は略す）。最大公約数は 11 である。

(5) $x^2-(a^2+a-1)x+a^3-a^2=(x-a^2)(x-a+1)=0$ である。よって $a^2-(a-1)=1$ または $a-1-a^2=1$ であれば良い。

1）$a^2-(a-1)=1 \iff a^2-a=0 \iff a=0,1$

2）$a-1-a^2=1 \iff a^2-a+2=0 \iff a$ は実数ではない。

以上より $a=0,\ 1$ を得る。

2

(1) 題意より $P\left(\overline{A}\right)=1-P\left(A\right)=\dfrac{3}{25}$ を得る。

(2)　題意より $P\left(\overline{A}\cap B\right)=P\left(B\right)\times P_B\left(\overline{A}\right)=\dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{2}{5}=\dfrac{2}{25}$ である。

よって $P\left(\overline{A}\right)=P\left(\overline{A}\cap B\right)+P\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)$ より，$P\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)=\dfrac{1}{25}$ を得る。ドモルガンの法則より $P\left(A\cup B\right)=1-P\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)=\dfrac{24}{25}$ である。以上より

$P\left(A\cap B\right)=P\left(A\right)\ +\ P\left(B\right)\ -\ P\left(A\cup B\right)=\dfrac{3}{25}$

(3)　条件付き確率の定義から

$$P_A\left(\overline{B}\right)=\frac{P\left(\overline{B}\cap A\right)}{P\left(A\right)}=\frac{P\left(A\right)-P\left(B\cap A\right)}{P\left(A\right)}=\frac{\frac{22}{25}-\frac{3}{25}}{\frac{22}{25}}=\frac{19}{22}$$

3

(1)　余弦定理より

$$a^2=y^2+d^2-dy\cos\left(180^\circ-\theta\right)=y^2+d^2+2dy\cos\theta$$
$$b^2=x^2+d^2-2dx\cos\theta$$

を得る。

(2)　(1) より

$$\begin{aligned}a^2x+b^2y\quad&=\left(y^2+d^2+2dy\cos\theta\right)x+\left(x^2+d^2-2dx\cos\theta\right)y\\&=x^2y+d^2y+xy^2+d^2x=(x+y)(xy+d^2)=c(xy+d^2)\end{aligned}$$

となるので，証明された。