中学校における数学的活動についての一考察

林　　雄一郎
北海道情報大学

A Consideration on Mathematical Activity in Junior High School Mathematics

Yuuichirou HAYASHI
Hokkaido Information University

平成24年11月

北海道情報大学紀要　第24巻　第１号別刷

〈研究ノート〉

中学校における数学的活動についての一考察

林　雄一郎*

A Consideration on Mathematical Activity in Junior High School Mathematics

YUUICHIROU HAYASHI

キーワード：数学的活動、問題解決、課題学習、探求的活動、応用的活動、言語表現的活動

１　はじめに

教育課程実施状況調査や国際調査で我が国の算数科・数学科の課題が明らかになった。

学力面では、児童生徒の基礎的計算技能の低下傾向は見られないが、計算の意味の理解や学習内容を実生活等で活用すること、また事柄や場面を数学的に解釈すること、数学的な見方や考え方を生かして問題解決すること、自分の考えを数学的に表現することに課題が見られた。

学習面では、数学の学習内容に興味がある割合が国際平均値より低く、数学の学習に不安を感じる割合が国際平均値より高い（PISA 調査）、また、算数・数学の学習が楽しいと思う割合が国際平均値より低い（TIMSS 調査）ことが判明した。さらに、算数・数学の勉強が好きと回答した割合が小学６年から中学１年にかけて低下する（教育課程実施調査2003）ことが判明し、算数・数学を学ぶ意義や有用性、社会全般における数学の果たす役割の認識を高める必要がある、粘り強く考え抜き問題を解決することによって得られる達成感や自信をもとに自尊感情や主体性を育む必要があるとの指摘がなされた[1]。

このため、国においては理数教育の充実を目標に掲げ、算数・数学科では、小・中・高を通じて、算数的活動、数学的活動を一層充実させ、基礎的・基本的な知識・技能の確実な習得と数学的な思考力･表現力の育成､学ぶ意欲の向上を目指すことになったのである。数学的思考力・表現力は、合理的、論理的に考えを進め、知的コミュニケーションを図る重要な手段であり、この能力を育成する具体的な指導内容・活動として、根拠を明らかにし、筋道を立てて体系的に考える、言葉や数・式・図・表・グラフなどの相互の関連を理解し、問題解決に活用する、自分の考えを分かり易く説明し、互いに表現し伝え合うことを重視している[1]。なお、直近の全国学力・学習状況調査で、数学的な事柄を解釈し、判断し、その理由を数学的に説明することに課題があるという結果が出ている。

以上の課題を踏まえ本稿では、中学校における数学的活動の在り方を小学校の算数的活動や高等学校の数学的活動との関連で考察するとともに、その授業モデルを提案する。

＊北海道情報大学情報メディア学部情報メディア学科教授

２では、まず小学校における算数的活動について、また３では、中学校の数学的活動が学習指導要領でどう構想され、どのような指導を目指しているかについて概観する。４では、数学的活動の教材となる問題の発見について考察する。５では、通常の授業における問題解決学習と課題学習の関連を踏まえて探求的活動を考察する。６では、今般の改訂で重視されている活用能力を育てる応用的活動について、また７では、数学的表現とそれを用いて説明し伝え合う言語表現的活動について考察する。８では、小・中・高での算数的活動・数学的活動で育成する資質・能力の系統性について、９では数学的活動の実践上の課題について考察する。10 では、数学的活動の授業モデルを提案し、11 では、数学的活動の評価について考察する。

２　小学校の算数的活動

算数科の目標は、“算数的活動を通して、数量や図形についての基礎的・基本的な知識および技能を身に付け、日常の事象についての見通しをもち筋道を立てて考え、表現する能力を育てるとともに、算数的活動の楽しさや数理的な処理のよさに気付き、進んで生活や学習に活用しようとする態度を育てる”[2]とし、旧目標と比べると“算数的活動を通して”が文頭に出て、“表現する能力”が追加された。

算数的活動は、“数量や図形の意味を、実感をもってとらえたり、思考力、判断力、表現力等を高めたりできるようにするとともに、算数を学ぶ楽しさや意義を実感したりするために、重要な役割を果たす”[2]ものであり、“児童が目的意識を持って主体的に取り組む活動”[2]である。授業においては、算数的活動を学習指導の中心に据えて「Ａ数と計算」、「Ｂ量と測定」、「Ｃ図形」および「Ｄ数量関係」の各領域の内容を学ばせることになる。

このため、学習指導要領には各学年の算数的活動が具体的に明示されている。その具体的な活動は、数える、表す、比べる、作る、式で表す、見付ける、見当を付ける、分解する、画く、敷き詰める、説明する、比べる、調べる、作図する、判断する、実測する、活用する、見付ける、解決する、などの算数的学習行動からなっている。例えば、５年生では、計算の仕方を考え説明する、面積の求め方を考え説明する、合同な図形をかいたり作ったりする、図形の性質を帰納的に考え説明したり、演繹的に考え説明したりする、目的に応じて表やグラフを選び活用する５つの活動がある。

この中で、“活用する”態度の育成は目標に謳われている通り重視されている。活用を重視する活用型学習は、数量や図形についての基礎的・基本的な知識・技能を身に付ける習得型学習と日常の事象を算数的な見方や考え方を用いて探求する探求型学習を“生活や学習”の場で統合するもので、PISA 調査で測定する数学的リテラシーとの共通性がある。

数学的リテラシーは、“数学が世界で果たす役割を見付け、理解し、現在及び将来の個人の生活、職業生活、友人や家族や親族との社会生活、建設的で関心を持った思慮深い市民としての生活において確実な数学的根拠に基づき判断を行い､数学に携わる能力”である。文中には“生活”という言葉が４回現れ、人間生活や社会生活の中で数学の活用を重視する PISA 型の学力観が謳われている。

旧課程での算数的活動は、作業的・体験的活動、身の回りにある具体物を用いた活動、調査的・探究的な活動、発展的・応用的な活動、総合的な活動であったが、今般の改訂は

旧課程の考えを継承しながら、身体を使ってものを作る作業的活動、実際的な体験活動、具体物を用いた活動、実態調査の活動、数量や図形の意味、性質や問題解決方法を見付けたり作りだしたりする探求活動、学習したことを発展させたり応用したりする活動、算数や他教科等の学習を通して身に付けたものを総合的に用いる活動[2]に分類している。

さらに、学年の活動例は、①具体物を用いて数量や図形の意味を理解する活動、②知識・技能を実際場面で活用する活動、③問題解決の方法を考え説明する活動に分類される[1,3]。この三つは、中学校の数学的活動の三つの狙いに連結し、発展していく。

いずれにせよ、児童期の数量や図形に関する体験は数や空間に対する認識の基礎でありPiaget の説を挙げるまでもなく重要である。

なお、教師の説明や計算練習は授業の中で基礎的・基本的な知識及び技能を確実に身に付けるために必要であるが、算数的活動とはみなさないとしている。

内容の取扱いでは、数量や図形に関する豊かな感覚や見積もり・およその大きさや形の捉え方を身に付けさせ、自分の考えを表現し相手と伝え合うためのスキルとして言葉による表現や数・式・図・表・グラフによる表現を活用できるよう指導に配慮するものとしている。

また、言語活動の充実は今般の改訂の改善事項である。数学的活動において、友人と協同しながら学習を深める言語表現能力の習得を重視している。この実践例として、荒川区立尾久第六小学校では「学習の手引き」を作成し、その中で「伝え合い・学び合いのマナー」の系統表を示し、授業で使うアイテム・言葉例、例えば“自分の考えをはっきりさせよう”、“考えを伝え合おう”、“考えをまとめ合おう”などの学習スキルを児童に教えている[4]。

このような表現的・探求的な能力は全ての教科の学習の基礎基本であり、総合的な学習の時間の活動と関連させながら習得させることが考えられる。

３　中学校の数学的活動

中学校数学科の目標は、“数学的活動を通して、数量や図形などに関する基礎的な概念や原理・法則について理解を深め、数学的な表現や処理の仕方を習得し、事象を数理的に考察し表現する能力を高めるとともに、数学的活動の楽しさや数学のよさを実感し、それらを活用して考えたり判断したりしようとする態度を育てる”であり、旧目標と比べると“数学的活動を通して”が文頭に出て、“表現する能力” が付け加えられたのは算数科と共通している。“考えたり判断したりしようとする”態度は算数科の“筋道を立てて考える”の発展であり、思考力・判断力の育成を意図している。

旧課程では、基礎的・基本的内容の定着と思考力・判断力・表現力の育成を目指した習得型と探求型の学力が謳われていたが、結果として成功したとは言えなかった。今般の改訂では、いわゆる“ゆとり教育”批判を受けて、習得型と探求型の学習の調和を図りながら活用型の学力を形成していくもので算数科と共通している。

数学的活動は、“生徒が目的意識を持って主体的に取り組む数学に係わりのある様々な営み”[5]であり、算数的活動の発展と考えられる。これは、目的意識をもって主体的に課題を見出し、試行錯誤しながら、資料収集、観察、操作、実験など様々な数学を行う問題解

決学習であり、数量や図形などの性質を理解し、思考力・判断力・表現力等を高め、数学を学ぶ楽しさや意義を実感できるようにするものである。この活動を通して、生徒は数学することとは何であるか、どう学ぶか、学ぶ目的を理解するのである。

活動は、各学年の４領域（数と式、図形、関数、資料の活用）の学習において、数や図形の性質などを見いだす、数学を利用する、数学的に説明し伝え合う、の三つがある。

① 数や図形の性質を見出し、さらに発展的・創造的に考えることを目指している。数学科目標の“数量や図形に関する概念や原理・法則の理解”を促がす活動である。
② 日常生活から社会まで範囲を広げ利用していく。これは、活用を通して考えたり判断したりしようとする態度を育てる活動である。
③ 数学的な表現を自分で行い、それを自他に説明したり、根拠を明らかにし、筋道を立てて説明し伝え合ったりする。いわば、事象を数理的に考察し表現する能力を高めるものであり、数学科目標を具現化する活動である。

以下、①、②，③をそれぞれ探求的活動、応用的活動、言語表現的活動と称する。

これらの活動は、生徒の学習状況に応じて効果的に機能する場面で行われるもので、毎時間の授業の中に必ず位置づけねばならないものではない。ただ、教師の説明を聞くだけや単なる計算練習を行う学習はこの活動に含まれないのは算数科と同様である。

数学的活動は基本的に問題解決の形で行われる。問題解決は事象を数理的に考察し問題を解決することであり、そのプロセスは事象の観察・疑問や問い⇒問題設定⇒事象の定式化⇒解決計画の作成⇒計画の実行⇒結果の吟味⇒現実問題への解釈からなる。

事象への疑問から課題の発見が起こり、問題設定で事象が数学の世界の問題となる。定式化は問題の数学化である。問題設定から結果の吟味までが数学的な処理であり、数学解を得る過程である。解釈はその数学解を元の事象に当てはめて考察することである。もし、さらに問題の捉え直しや別解の再考など発展的な疑問や問いとして再課題化に至れば、新たな課題への挑戦となる。

また、数学的活動の過程は事象の定式化⇒・・⇒結果の吟味などの簡易型（short cut）も考えられ、授業目標や内容に応じた工夫ができよう。

この問題解決の過程を通して、生徒は目的意識を持って主体的に数学を作る体験をすることが期待される。探求的活動では、数学をする面白さや楽しさ、数学の必要性や有用性を実感することが期待されるし、他者との数学的コミュニケーションを通して知的な表現スキルを学習し、もって達成感や成就感、自信や自尊感情を育む機会を持つことが期待される。

４　問題の発見

数学的活動は、日常生活や社会の中の事象や授業で学ぶ内容に疑問や問いを持ち、それを数学の問題とすることが出発点である。そのためには、実験や実測、実地調査を通して得られたデータを整理・分析する科学的な方法が必要になるし、“数理のメガネをかけて”事象を観察する態度が必要である。その際、事象に対する知識があれば仮説を持って観察

でき、問題を見つけることができるから、知識は問題を発見する重要な要素である。「知は力なり」である。

また、ＷＥＢの情報検索を通して問題を見付けることもあろうし、既存の問題から新たな問題を見付ける場合もある。それは、既存の問題の条件を変えてみたり、一般化したりして、派生する問題を考えることである。その際、友人らと色々なアイディアを出し合い、検討し合う小集団活動は効果的である。また、問題づくりには教師の適切な助言や支援も重要である。こうして、自作問題を作る中で、問題づくりとそれを解く体験が相乗効果を発揮して問題づくりの意義や面白さに気付くことになる。

授業の文脈の中で疑問や問いを形成し問題を見つけさせることは授業の流れを作る上で重要である。どのようなヒントを与えるとどのような思考を促すかの実践的研究が必要である。

５　探求的活動

探求的活動は、既習の数学を基にして、数や図形の性質などを見出す問題解決である。“数や図形の性質など”には関数や場合の数、資料の活用が含まれるから４領域の全てが教材の対象となる。

３で述べた定式化から結果の吟味に至る数学的な表現と処理の過程では、数学的な見方や考え方が重要な役割を果たす。数学的な見方や考え方には、一般化・特殊化、抽象化・具体化、分析・統合、帰納・類推・演繹などの方略があるが、方法論に関する指導はこれまであまりなされて来なかったから、生徒がうまく使いこなせるようにすることはこれからの課題である。

この活動は、新たな課題を既習の数学を基にして発見し、発展的・創造的に行うので、個人で考えるよりも集団でコミュニケーションを深めながら考える方が効果的である。通常の授業あるいは課題学習の中でワイワイガヤガヤ意見を出し合いながら検討し合う集団思考による活動方法、例えばブレイン・ストーミング法やKJ法などが検討されてよい。

第１学年では、正の数・負の数、文字を用いた式、一元一次方程式、平面図形、空間図形、比例、反比例、資料の散らばりと代表値など既習の数学を基にして数や図形の性質などを主体的に見出す活動を行う。第２学年では、生徒が数学に主体的にかかわることを一層重視し、文字を用いた式の四則計算、連立二元方程式、基本的な平面図形と平行線の性質、図形の合同、１次関数、確率など既習の数学を基に見出した性質などをさらに発展させ、新たな課題を発見し解決する活動を行う。第３学年では、平方根、式の展開と因数分解、二次方程式、図形の相似、円周角と中心角、三平方の定理、二次関数、標本調査など既習の数学を基にして、数や図形の性質などを見出し、発展させる活動を行う。

以下、数や図形の性質を見出し発展させる活動を具体例の問題解決で考えてみる。

問題１　三地点 A,B,C で囲まれた土地があり、AC 上の地点 X 、BC 上の地点 Y をうまく選び $AX=XY=BY$ となるような道 XY を作りたい。地点 X,Y をどう選んだらよいか。

（図１）

この問題は、参考文献６にある例題を少し変えたものである。そういう道が引けたと考えて、逆向きに考える方略が定石である。そこで、そういう道があるとして、幾何学的な性質をいろいろ調べてみる。こういう発見的な解き方の方略については教師が前もってしっかりと教えておく。

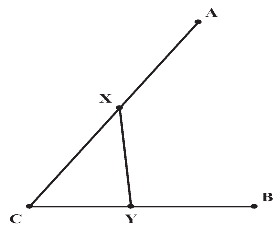

図１

まず、図２のようにいろいろ補助線を画き入れて試行錯誤してみることで手掛かりを探ることになる。$XY=BY$ だから菱形 $XYBD$ を考えてみるのは自然である。そういう点 D を選ぶ。

すると、$BY=DX$

こうして凹四角形 $AXDB$ が浮かび上がってくる。次に、問題の言い換えは出来ないか考える。

それは、この四角形の作図はどうしたらよいかという問題である。

そこで、これと相似な四角形を作ってみるという考え方は自然であろう。

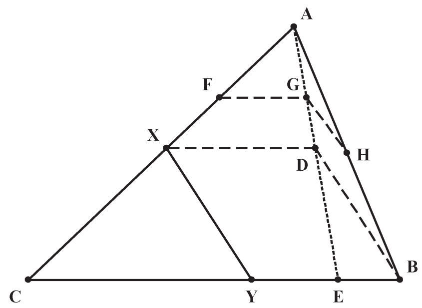

図２

つまり、線分 AC 上に点Ｆを任意に取り、線分 BC に平行な線上に $AF=FG$ となる点 G を定め、線分 AG の延長と線分 BC との交点を点 E とするのである。

また、$FG=GH$ となる点 H を線分 AB 上にとる。これで準備完了である。四角形 $AFGH$ は、$AF=FG=GH$　を満たす。この図形と相似な図形を作図すればよいことになる。

図のように、$GH//DB$ となる点 D を定める。さらに、点 D から線分 BC に平行な線を引き、線分 AC との交点を点 X とする。　２つの四角形 $AFGH$ と $AXDB$ は相似となる。$DB//XY$ となるように点 Y をとれば $AX=XY=YB$ となり完成である。$\angle A$ によっては、点 G と点 H,E が ΔABC の外部にある場合があるが、その場合も同じような手順で作図できることも確かめられる。

問題２　a,b は整数とし、座標平面上の点 $A(a,b)$ と原点 O を結ぶ線分 AO を考える。a と b に公約数がないとするとき、線分 AO 上に座標が整数である点（格子点）はあるか。

グラフ用紙に格子点をいろいろ書き入れて観察してみる。帰納法である。図３は$a=3,b=4$の場合である。線分OAの傾きを考えることがヒントとなる。
もし、線分上に座標が整数となる点$B(p,q)$があるとする。背理法である。

$1<p<a$、$1<q<b$

線分の傾きを考えれば　$\frac{b}{a}=\frac{q}{p}$　となる。しかし、これは　a,b　に公約数がないとしたことに反する。　したがって、線分AO上には格子点はない。

この解決法は背理法の有効性を実感させるものである。この方法を理解すれば証明の選択肢は広がるであろう。

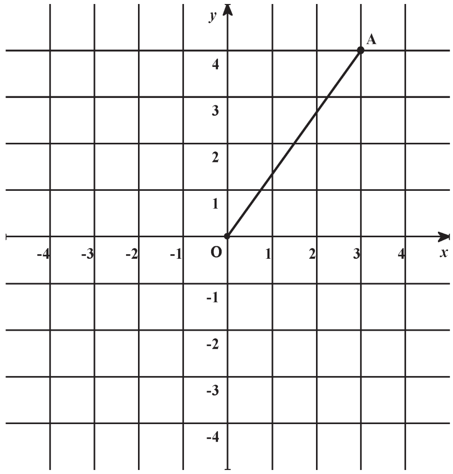

図３

６　応用的活動

応用的な活動は、学んだ数学をどう活用するかという問題解決である。応用的活動には探求的活動が伴うし、逆に応用的活動は探求的活動を促すから、往還的である。日常生活で“応用的な問題のテーマ”を見付け、探求することから数学活用は始まる。その問題解決の過程は探求的活動と似たものである。問題の定式化(数学化)では、考察する事象を単純化したり理想化したりして、既習の数学の知識を応用する。この場合、現実世界の問題の理解が第一の難しさである。さらには定式化としての応用の際にどういう数学を、どう用いるか考察しなければならない。これが第二の難しさである。

数学的活動においては数学の問題解決が主であり、現実の問題の解決は従となるが、事象に関する知識も含めた総合力が問われる。例えば、光の反射に関する理科の知識が必要となるなど問題によっては、数学以外の知識が必要になる。そういう問題を扱うにはまず事象を単純化することが大事だが、他教科の教師と連携しながら対処する必要がある。場合によっては､生徒の見つけた問題が中学の知識レベルを越える場合があるかもしれない。その際は教師の適切な指導や助言が必要となる。

第１学年では、身近な出来事などを考察の対象とし、既習の数学を利用することを重視する。第２学年では、利用範囲を広げ、社会における様々な事象も視野に入れて考える。第３学年では、第２学年に引き続き、日常生活や社会の中で数学を利用することを考えることになる。

以下で、日常生活や社会で数学を利用する課題を考察する。

問題３　２枚の板状の鏡を 45 度の角度で図１のように交差させ、一筋の光線を点 A に当てたときの反射光がさらに点 B で反射して元の入射光と交わるとする。このとき交わる角度を求めよ。

光の反射の法則は理科第１分野の身近な物理現象で学ぶ。鏡が 45 度の角度で交差し、その表面に入射した光線が点 A で反射し、それがまた点 B で再び反射する様子を描く。（図４）このため、光線は直線となること、直線と平面の関係の理解が必要である。交わる二平面を真横から見た図を描くと図５のようになる。

ここで　$\angle PBD = \angle PAD = 90^0$

光は鏡で反射するとき入射角と反射角は等しくなる。

$\angle CAD = \angle BAD, \angle ABD = \angle CBD$

$\angle PAD = \angle PBD = 90^0$ だから四角形 $APBD$ は円に内接する。

$\angle APB = \angle BDJ = 45^0$

したがって　$\angle ABD + \angle BAD = 45^0$

よって　$\angle CAB + \angle ABC = 90^0$

したがって、$\angle ACB = 90^0$

こうして、点 A への入射光と点 B での反射光は直角に交わることが分かった。

光の反射に関する理科の法則、空間の二つの平面の交わり、円に内接する四角形の性質などを用いて解いたが、実際に鏡を２枚用意し、レーザーポインター、ドライアイスを用いて実験させてみる授業ならば、問題解決のプロセス「事象の観察・疑問・問い⇒・・⇒現実問題への解釈」という流れに沿った学習ができる。これは Moore が提唱した Laboratory Method[7] 的な授業となる。

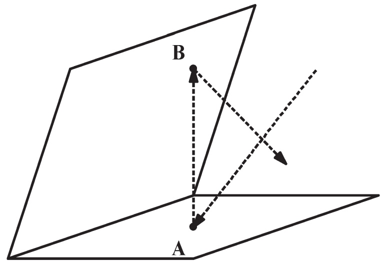

図４

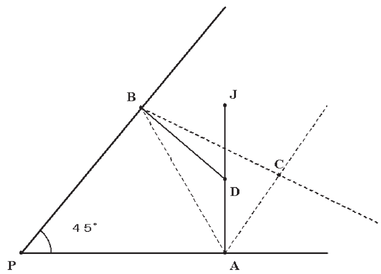

図５

問題４　夜の道 x に沿って人 PR が歩いており直線 y はその道筋である。街路灯 AO があり線分 RQ は人影とし、点 S での人影を ST とする。このとき、影の先端の軌跡 QT は人の道筋 y と交差するか、それとも平行となるか。また、頭の影の速さと人の歩く速さを比べなさい。

この問題は筑波大付属中学校での授業実践で扱った問題[8]を少し変えたものである。（図６）

点光源の影の性質、平行線と辺の比の関係を利用する。

ΔAOQ は直角三角形であり、$AO//PR$ より

$AO:PR=OQ:RQ$

同様に ΔAOT も直角三角形であり、$AO//HS$

$AO:HS=OT:ST$　　ここで $PR=HS$

したがって　$OQ:RQ=OT:ST\cdots①$

$OQ=OR+RQ, OT=OS+ST$

①を書きなおすと $\dfrac{OR+RQ}{RQ}=\dfrac{OS+ST}{ST}$

$\dfrac{OR}{RQ}+1=\dfrac{OS}{ST}+1$　　　$OR:RQ=OS:ST$

したがって $RS//QT$

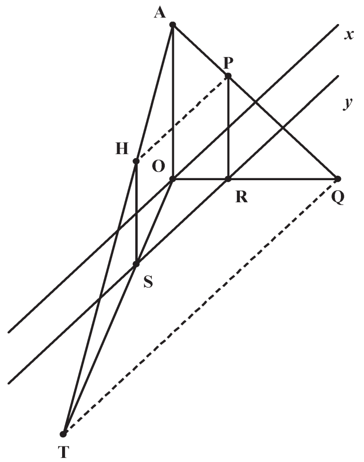

図６

この問題を、もし交差すれば交点では影がなくなるはずである。そういう点は O しかないので、人は点 O を通ることになり矛盾すると背理法で考えた生徒がいたのは見事である。

また、街路灯の高さを h メートル、人の身長を m メートル、歩く速さを毎分 a メートルとする。点 R から点 S まで t 分かかったとすれば $RS=at$ メートル、このとき頭の影は点 Q から点 T まで移動している。同時間内に $RS<QT$ だから影の速さの方が大きいことが分かる。あるいは、$QT=x$ メートルとするとき点 S、点 T の速さを実際に求める方法もある。

$\dfrac{RS}{QT}=\dfrac{OR}{OQ}=\dfrac{OQ-RQ}{OQ}=1-\dfrac{RQ}{OQ}=1-\dfrac{PR}{AO}=1-\dfrac{m}{h}$　よって $\dfrac{at}{x}=1-\dfrac{m}{h}<1$　　$x=\dfrac{h}{h-m}\cdot at>at$

$\dfrac{x}{t}=\dfrac{h}{h-m}\cdot a>a$　　したがって、影の速さの方が人の速さより大きい。

影の伸びる方向や速さなど光と影の関係などについて実験してみれば状況の理解を助けるであろう。また、平面と平面の交わり、平面上の垂線などの空間の図形認識が必要である。

7　言語表現的活動

言葉は、“他者を理解し、自分を表現し、社会と対話するための手段であり、家族、友だち、学校、社会と子供とをつなぐ役割を担っている。言葉は、思考力や感受性を支え、知的活動、感性・情緒、コミュニケーション能力の基盤となる。国語力の育成は、すべての教育活動を通じて重視することが求められる”[9]のであり、思考力・表現力・判断力等や

知識・技能の活用力を育むもととなる。数式を含む広義の意味での言語としての算数・数学の表現力は、数学はもとより確かな学力の基盤として位置付けられ育成するべきものである。

このため、自分の考えを言葉や数、式、図、表、グラフなどを用いて数学的に表現し、根拠を明らかにし、筋道を立てて説明し伝え合う活動が重要視されている。探求的活動や応用的活動の中では、数学的表現を通して見出した事柄を他者と伝え合い、方程式の解法や計算アルゴリズム、考えの正しさや妥当性について論理的に説明する言語表現的活動が想定される。

具体的には、第１学年では数学的な表現に慣れ、使うことで自分なりに納得し、他者に説明し伝え合うとともに、第２・３学年では判断の根拠を明らかにし、筋道を立てて説明し伝え合う活動に発展することでさらに洗練され、実質的な力量になるようにする。

課題は、算数的活動のところでも触れたように相互に説明したり、伝え合ったりする活動を円滑に行う表現力の習得である。例えば、問題を解く際の定式化の表現の拙さやそれを他者へ説明する際に表現力が未熟なため、的確に説明できなかったり、他者との討論やレポートの論述が円滑に行われなかったりするなどである。その原因は、数学の用語の使い方や言葉、数、式、図、表、グラフの適切な活用の仕方、論理的な説明などの表現力に課題があるからである。

したがって、数学的な考えの表現の仕方や物事を論理的に考え判断し、自分の考えを進めていく技法の習得が必要である。また、このような力量の基礎となる言語的表現能力の育成を各教科共通の課題として位置付け、例えば総合的な学習の時間と関連させながら育成することが考えられる。

８　算数的活動・数学的活動の系統性

算数・数学的活動は、発達段階に応じ、系統性を考慮して指導されるから、この活動の校種相互の関連性を捉えておく必要がある。小学校は各学年で学ぶ４領域の内容ごとに細かく活動内容・目的が示されている。中学校では領域の指定はなく１学年と２・３学年に分けて示され、学年ごとの領域横断的な活動となる。高校では、数学Ⅰと数学Aに課題学習が位置付けられるとともに、数学活用も含めて内容の取扱いで数学的活動を一層重視するよう包括的に示されている。

このように、小・中・高での活動内容に記述の差がみられるが、小・中・高の内容には系統性が見られる。

（１）算数的活動（小学校）　※丸数字は学年を示す

A　数と計算

具体物を数える、計算の意味や仕方を表す①→整数が使われている場面を見つける②、乗法九九表からきまりを見つける②→計算の仕方を考え説明する③→計算の結果を見積り判断する④→計算の仕方を考え説明する⑤⑥→中学校①A 数と式で数の性質を見出す活動へ発展する

B　量と測定

量の大きさを比べる①→量の大きさの検討をつける②→単位の関係を調べる③→面積の求め方を考え説明する、面積を実測する④→面積の求め方を考え説明する⑤→単位の関係を調べる⑥→中学校①B 図形で図形の性質を見出す活動へ発展する

C　図形

形を見つけたり、作ったりする①→図形を描いたり、作ったり、敷き詰めたりする②→正三角形などを作図する③→平行四辺形などを敷き詰めたり、図形の性質を調べる④→合同な図形を描いたり、作ったりする、図形の性質を帰納的に考え説明したり、演繹的に考え説明したりする⑤→縮図や拡大図、対称な図形を見つける⑥→中学校①A 図形の性質を見出す活動へ発展する

D　数量関係

場面を式に表わす①→図や式に表し説明する②→資料を分類し表を用いて表す③→身の回りの数量の関係を調べる④→目的に応じて表やグラフを選び活用する⑤→比例の関係を用いて問題を解決する⑥→中学校①C 関数、D 資料の活用での日常生活で数学を活用する活動へ発展する

（２）数学的活動（中学校）

新たな改訂で中学校の数学の授業時間数は 70 時間増加した。小学校に移行した教材もあるが、増えた時間分、高校から新たな教材－数の集合と四則計算の可能性、大小関係を不等式で表すこと、球の表面積と体積、資料の散らばりと代表値、有理数と無理数、二次方程式の解の公式、相似な図形の面積比と体積比、色々な事象と関数、標本調査－が移行してきた。

A　数と式

正負の数、文字を用いた式、一元一次方程式①→算数の知識を基として数の性質を見出す活動

文字式の四則計算、連立二元一次方程式②　、平方根、式の展開と因数分解、二次方程式③→既習の数学を基にして数の性質を見出し、発展させる活動

B　図形

平面図形、空間図形①→算数の知識を基にして図形の性質を見出す活動

基本的な平面図形と平行線の性質、図形の合同②、相似、円周角と中心角、三平方の定理③→既習の数学を基にして、図形の性質を見出し、発展させる活動→数学的な表現を用いて、根拠を明らかにし筋道立てて説明しあう活動

C　関数

比例、反比例①→日常生活で数学を利用する活動

一次関数②、　関数 $y=ax^2$ ③→日常生活や社会で数学を利用する活動

D　資料の活用
資料の散らばりと代表値①→日常生活で数学を利用する活動
確率②、標本調査③→日常生活や社会で数学を利用する活動

課題学習
既習の数学を基に数や図形の性質を見出し発展させる活動は、高校数学の数学的活動の配慮事項(1)の活動に、また日常生活や社会で数学を利用する活動は配慮事項(2)に、数学的な表現を用いて根拠を明らかにし、筋道を立てて説明しあう活動は配慮事項(3)に記載された活動につながる。

（３）数学的活動（高等学校）

A　数学Ｉの内容　　　数と式、図形と計量、二次関数、データ分析

B　数学Ａの内容　　　場合の数と確率、整数の性質、図形の性質

課題学習
課題学習は数学Ｉ、数学Ａにある。これは中学と同様に、学習内容またはこれらを相互に関連付けた内容を生活と関連付けたり発展させたりして生徒の関心・意欲を高める課題を設けるとともに、生徒の主体的な学習を促し、数学のよさを認識できるように数学的活動で行う。

C　数学活用の内容　　数学と人間の活動、社会生活における数理的な考察

各科目の指導に当たっては、数学的活動を重視し、数学を学ぶ意義が実感できるよう、次のような配慮事項を示している。
(1)　自ら課題を見出し、解決するための構想を立て、考察・処理し、その過程を振り返って得られる結果の意義を考えたり、それを発展させたりする
(2)学習の内容を生活と関連付けた、具体的な事象の考察に活用する
(3)自らの考えを数学的に表現し根拠を明らかにして説明したり、議論したりする
高校の数学的活動については拙論[10]を参照されたい。

９　数学的活動を行う上での課題

授業の中で数学的活動を適切に行うための新たな授業づくりとこの活動を円滑に進めるに当たっての課題は多い。

（１）　数学的活動を取り入れた授業計画

まず、概念や原理・法則の理解・習得という非数学的活動と数学的活動の構成比率（時間配分）を決めねばならない。非数学的活動が多すぎると教師主導の教え込みになってしまう。この活動は課題学習に限定するのではなく通常の授業にも入れる必要がある。

また、数学的活動では小集団学習や発表学習を取り入れ言語表現的活動を確保するようにする。小集団の編成方法は、ペア・グループなど近隣の座席に座る集団（informal group）から同じ問題を選択した集団が考えられる。これらの活動を勘案しつつ、時間配分を考慮して指導計画を工夫する必要がある。

（２）　数学的活動に対する時間配分

短時間型と長時間型が考えられる。短時間型は、授業の中で10～15分程度集中的に行い、長時間型はじっくりと授業時間１～２コマをかけて取り組ませる。この両者をどのように選ぶかは、授業の目的、進め方、扱う題材や問題解決の質に応じることになる。長時間型の例は課題学習である。活動型パターンは表のようにａ、ｂ、ｃ、ｄの４つ考えられる。実施パターンは、ａ、ｂ、ｃ、ｄ、ａ→ｂ、ａ→ｄの６類型が考えられる。

	短時間型	長時間型
個人活動	a	c
小集団活動	b	d

ａは基礎的、基本的な内容の問題解決である。ｂ、ｃはａの変形パターン、ａ→ｂは、個人で考えた後、集団で行わせる。ｄは時間をかけてじっくりと取り組ませる課題のときである。

ａ→ｄは初め個人で考えさせ、やがて小集団活動で長時間型の問題解決である。a、c は個人の問題解決力を向上させる。

授業で採用する問題は、それを解くための実施パターンで分類しておく。ａはＡ型、ｂはＢ型，ｃはＣ型、ｄはＤ型、ａ→ｂはＡＢ型、ａ→ｄはＡＤ型とすれば六つの問題型ができる。こうして類別し、整理された問題集から生徒に選択させて活動に入る。このような問題作成を数学的活動の中でいつ、どのように行わせるかが課題である。

（３）　問題解決の道具立て

４領域の学習を済ませた後に長時間型で行う数学的活動なら道具立ての心配はないだろう。しかし、生徒に問題を考えさせて短時間型の活動でそれを解かせる場合、問題が不適切なら授業展開がスムーズには行かない。したがって、そういう授業では臨機応変の対応が必要となる。例えば、図形の合同を学んだ後、相似の性質が必要な問題を生徒が考えた場合である。このときは、「この問題解決は、これ以上進めないのでここまでにしておいて、後は相似を学習してから挑戦にしようね」というような対応となる。このような試行錯誤のある授業は発展的、創造的な生き生きとした学びを意図したいわば羅生門的アプローチであるが、指導が難しくなるだろう。

他方、教師が問題選択をしながら進めれば、授業は円滑に進むだろうが、生徒の主体性を確保する工夫が必要となる。例えば、教師が作成しておいた問題リストから生徒に適切に選択させて数学的活動を行えば生徒の主体性を確保できる。

（４）　グラフ電卓等の活用

各領域の指導に当たって、そろばん、電卓、コンピュータ、情報通信ネットワークを活用し学習効果を高める配慮が求められている。特に、グラフ電卓を用いた教材開発の可能性は広いし、これを活用した授業実践が試みられてきた。例えば、実験・観察の結果をグラフ電卓でまとめて関数関係を理解させる関数の授業例では、鏡による反射実験をグループで行い、反射地点までの距離と像の高さの間の反比例関係を読み取らせるなどの数学的活動を行わせている[11]。

比例・反比例・一次関数・二次関数の領域では、実験データの直線による近似を行い変数同士の関係を調べる、二元一次方程式を直線で表しその解と交点の関係を理解する、スライダーを用いたアニメーションでグラフの変化の様子を観察するなどが考えられる。また、資料の活用の領域では、実際の資料データからヒストグラムや相関図などを作成し資料の統計的特性を理解することが考えられる。

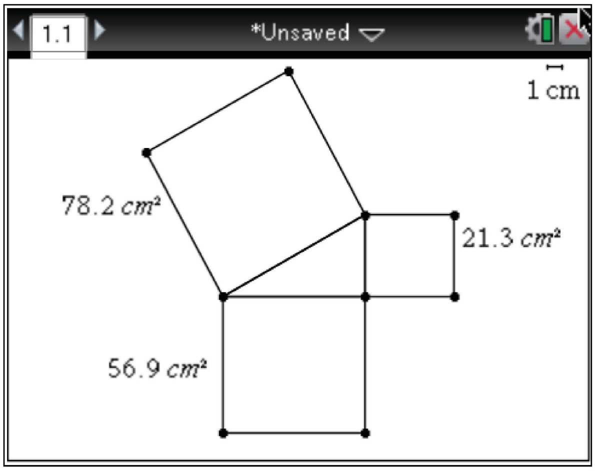

図７

さらに、図形領域では、作図機能を用いて図形を描画したり、直角三角形の辺を一辺にもつ正方形の面積を測定ツールで計算し三平方の定理を画面上で理解したりする学習活動が考えられる。（図７、グラフ電卓 TI-N spire CX CAS による画面）

また、課題テーマを見つけたり、数学史などについて調べるのにインターネットを活用する、発表学習でパワーポイントを用いてプレゼンテーションしたり、ワープロでレポート作成するなども考えられる。

数学的活動へのＩＣＴの活用を促すためには、生徒が見つけた課題解決に、グラフ電卓などを自由自在に活用できることが必要である。そのため、普段の授業でこれらを活用する機会を多く設けて活用の効果を熟知させ、その操作に習熟させておく必要がある。

また、近年、グラフ電卓の高機能化が進むとともに、安価で手に入るようになってきた。その整備を進めるとともに、授業において有効性を生かした活用が求められている。

（５）　課題学習における数学的活動

課題学習は８（２）でも触れたように、“生徒の数学的活動への取り組みを促し思考力、判断力、表現力等の育成を図るため、各領域の内容を総合したり日常の事象や他教科等での学習に関連付けたりするなどして見出した課題を解決する学習である”[5]。これは、領域や教科横断型の課題を対象とし、総合的な知識を必要とする問題解決である。このよう

な課題は①様々な思考や創意工夫が可能で意欲的に追究を継続できる、②生徒がそれぞれの方法で結果を見通せる、③多様な数学的な見方や考え方が発揮できる、④課題解決だけでなく解決を振り返り発展的に考えることができる、という要件を満たす[5]としている。その問題例としては全国学力・学習調査Ｂ問題が参考になるという見解がある[12]が、問題作成や授業方法の参考になるであろう。

平成24年度のＢ問題は、理科、自然数、スポーツ競技、作図、測量、幾何図形の馴染みのある分野からそれぞれ人工衛星の軌道の長さ、連続する整数の和、スキー・ジャンパーの記録と予想、垂線の作図、塵劫記にある木の高さの計測、正多角形の頂点の数と外角の大きさの関係について数学の活用を問うものだった。出題形式は、文章表現を問うたり、思考を誘導したりする設問群であり、授業においての発問誘導の参考になるであろう。

実施結果から、問題を数学的に表現することや数学的に表現された事柄を読み取ること、図形の内容を関数の視点から動的な関係として捉えること[13]が課題としている。数学的に表現する、事柄や場面を数学的に解釈する力の不足はこれまでの国際調査でも明らかにされていたものであり、今後の指導上の課題となるであろう。

１０　授業モデル

基礎的、基本的な知識・技能の習得は、教師主導の習得型学習でしっかりと行う。ただし、授業の中で適宜数学的活動を取り入れ、楽しく学び、主体性を発揮できる工夫が必要である。数学的活動は、授業の中では短時間型、単元終了段階では長時間型で行う。

問題づくりは、生徒にあらかじめ作成させておく場合と授業の流れの中で考えさせる場合がある。前者の場合は数学的活動の中で行わせ、後者の場合は授業の文脈の中で見つけさせる。教師が問題を準備する場合もある。

学習活動は、小集団を基本とし、発表の際はクラス全体とする。個人活動でも生徒同士が自由に話し合いながら進める場合もある。小集団の編成は同問題を選んだ者同士や近隣の席で組むなどがある。

探求的活動は、原理・法則に関わる問題解決で、応用的活動は、身の回りにある事象に関する実際的な問題解決であるから、課題テーマによって探求的だったり応用的だったりする。短時間型の活動でも探求的活動は可能である。応用的な活動は長時間型となる。

言語表現的活動は、いずれの活動でも基本に据える。教師主導の場合は、課題に沿った小問を準備し、解決のヒントを小出しに与えて小集団活動で生徒の考えを引き出し、問題解決を誘導することになる。この問題解決における教師と生徒の対話をT-Sコミュニケーション（Tは教師、Sは生徒）と称する[10]。この起源はソクラテス的対話法にあるが、数学的活動を促すT-Sコミュニケーションの在り方については工夫が必要である。

集団思考は生徒同士の対話で行われる。これをS-Sコミュニケーションと称する[10]。この対話の質を高めることが数学的活動の成否を決める。そのためには、生徒の活動意欲を盛り上げること、集団思考のスキルに習熟していること、グループ・リーダーが適切にリードすること、教師の机間指導によるモニタリングを行うこと、そして各グループへの適切な助言を行うことである。「課題学習の手引き」で集団思考スキルを向上させる。

以下、短時間型、長時間型の授業モデルを提案する。

（１）　短時間型の活動

教師主導で授業を進め、小集団活動は 10 分～15 分前後の活動を１～２回入れる。授業の流れの中でＡ型、Ｂ型、ＡＢ型問題を提示する。授業の流れは時間厳守で行い、問題解決に至らずとも問題の理解や解決の糸口を見つける活動でもよしとし、臨機応変に対応する。小集団活動時の机間指導を適切に行う。できたら内容を発表させ、全体で考えたり、行き詰まった点を確認したりして、最後に活動に関する振り返りを行わせる。

短時間型の授業指導案を資料添付しているので参照されたい。

（２）　長時間型の活動

この活動は課題学習を想定している。生徒もしくは教師が考えたＤ型、ＡＤ型問題を提示する。充分な時間を確保し問題解決の活動を行わせる。教師は、机間指導しながら各グループの活動をモニタリングし、アドバイスする。解決したグループが出たら、発表学習に移り、活発なディスカッションを促す。最後に教師がまとめる。問題解決やプレゼンテーション、質疑応答や討論の仕方などについて相互評価、自己評価を記入し振り返りをさせる。最後に、研究活動レポートを課して終了する。

１１　数学的活動の評価

評価には、目標に準拠した評価、相対評価、個人内評価があるが、数学的活動の適切な評価の在り方を考察し、その評価の観点を点検項目として作成しておく必要がある。

例えば、①問題を見付けられたか、②数学を用いて問題を表現できたか、③問題解決の方法が身に付いたか、④自分の考えを他者に説明できたか、⑤他者とのコミュニケーション活動は円滑にできたか、⑥数学的な見方や考え方は身に付いたか、⑦数学のよさや楽しさを活動によって実感できたか、などが考えられる。

活動が終了した時点でこの点検項目に基づいて、生徒同士の相互評価、生徒個人の自己評価を行わせる。これ以外にも、振り返り（活動記録）や活動レポートなどの成果物を個人フォルダに蓄積し、ポートフォリオ評価として使う。

また、活動の前後で自分はどのように変容したかを文章記述させる。それを教師が点検し、必要に応じて個別指導を行う。こうして、生徒が自己の取り組みを客観的に把握する能力が育ち、メタ認知ができるようになる。個を生かす評価、指導に生きる評価を目指すことが数学的活動の評価観であろう。

なお、国立教育政策研究所の「評価の基準の作成、評価方法等の工夫改善のための参考資料」[14]には数学的活動を数学への関心・意欲・態度としては位置付けているが、詳細な記載が見られない。数学科目標には“数学的な活動の楽しさや数学のよさを実感し・・”とあることから、情意的目標に限定したと考えられる。

数学的活動は目標全体にかかわっているのであるから、この趣旨に沿った評価が適切であると考えている。

１２　おわりに

中学校の数学的活動は、小学校での算数的活動を発展させ、義務教育としての完結性を担うが、実際は高等学校での数学的活動に繋げる中間の位置にある。このために、算数的活動、数学的活動で育む資質・能力を明確にとらえ、互いの系統性を踏まえるとともに、領域ごとの内容の関連を考慮しながら行う活動が求められ。したがって、高等学校の数学的活動では、中学校で身に付けた資質・能力を項目ごとに確認しながら、高校段階の資質・能力に高めていく取り組みが求められる。

このように小・中・高の各学校段階を踏んで次第に身に付けさせていく数学に対する関心・意欲・態度、算数的・数学的な見方や考え方、数学的な技能や知識・理解などの資質・能力を確実に習得させていく鍵は、各校種毎に担う目標の達成にある。今の日本の教育はこれが十分でないため、その影響が最終段階の大学教育にまで及ぶに至っており、各大学においては、初年次教育の中で補習教育(remedial education) を行わざるを得ない実情があり大学教育への影響は計り知れない。

日本数学会の報告[15]によれば、小・中・高の数学の問題を大学生（いわゆる“ゆとり世代”）に解かせたところ、平均の意味（小６レベル）の理解、命題の論理的な読み取り（高、数学Ａレベル)、整数の問題の論証力と表現力（中２レベル)、作図における相似図形の活用（中３レベル）に課題があることが判明している。これは大学生に数学的素養や論理力の欠如している者が相当数いるという警鐘である。この結果を受けて、報告では初等中等教育へは、論理性の育成を提言している。論理的思考力は小・中・高を通して次第に育成しているはずであるから、その成果が上がっていないということである。新たな数学科の目標でも論理的思考力の育成は重視されており今後の取り組みが注視される。他方、大学教育に対しては、入試問題の記述化や初年次教育での思考整理や論理的記述の重視が提言されている。

以上のように、日本の数学教育には様々な課題が山積している。新たな学習指導要領に基づく数学教育が、2011 年度小学校、2012 年度から中学校、高校で始まったのを機に、喫緊の課題の解決に向けた抜本的な取り組みが期待されているのである。

引用・参考文献

1 文部科学省：中央教育審議会答申、p.83～p.87、2008
2 文部科学省：小学校学習指導要領解説・算数編、p.20、p.218、2008
3 小西豊文：小学校教育課程講座・算数、p.100～p.101、ぎょうせい、2009
4 石井ゆき子：校内研修の継続・深化・発展を図るための研究主任の役割（平成 23 年度 北海道地域 教育連携フォーラム)、p.21～p.26、2012
5 文部科学省：中学校学習指導要領解説・数学編、p.17、2008
6 ポリア(柴垣和三、金山靖夫訳):数学の問題の発見的解き方Ⅰ、p.7～10、みすず書房、1962
7 E.H.Moore : ON THE FOUNDATIONS OF MATHEMATICS , p.402～p.424 Bulletin of American Mathematical Society , volume 9,1903
8 清水静海（監修)、大根田 裕：数学を活用し、思考力、判断力、表現力を高める授業づくり（中学校数学・授業改善シリーズ③１年・影の動き)、ジャパンライム KK
9 文部科学省：中央教育審議会教育課程部会「審議経過報告」、p.13、2006
10 林 雄一郎：数学的活動についての一考察―高等学校の場合、北海道情報大学紀要第 23 巻、p.69～p.92、2011
11 川上公一：実験・観察を取り入れた関数の学習―グラフ電卓を利用して、第 18 回東書教育賞論文、2003
12 清水静海：平成 20 年改訂・中学校教育課程講座数学、p.228、ぎょうせい、2009
13 国立教育政策研究所：全国学力・学習状況調査結果について、p.12～p.17、2012.8
14 国立教育政策研究所・教育課程研究センター：評価基準の作成のための参考資料（中学校)、p.69、平成 22 年
15 日本数学会教育委員会：大学生数学基本調査、2012

授業指導案　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　添付資料

単元名	式の展開と因数分解（３学年）			
単元指導目標	整数の性質についての理解を深め、それを事象の考察に活用できるようにする			
単元計画（配当時間）	単項式と多項式の乗法と除法の計算（1/7～2/7）、簡単な式の展開や因数分解（3/7～5/7） 文字を用いた式でとらえた説明をすること（6/7）、課題学習（7/7）			
本時指導目標	・文字式の表現を用いて九九の表に見られる不思議な特徴を探求する ・短時間型の数学的活動を行う			
指導計画	時間配分	教授活動	学習活動	備考
導入	５分	課題学習の留意点を生徒に確認。（課題は生徒の作成したもの）	グループ（４人１組）に分かれ机を配置し座す	「課題学習の手引き」使用
課題の提示	５分	＜課題の提示＞ 「九九の表で七の段の数の１の位はすべて異なる数。どうしてだろう？」	九九表をノートに書いて課題の理解と確認をする	
探究的活動		問１「七の段だけだろうか？」 九九表を板書する 気付いた班の発表指示（口頭）	一、三、九の段でも起こることを確認する 班ごとに考察・議論	
探究的活動	５分	設問１「なぜ、こういうことが起こるのだろうか？」	「１，３，７，９が１０と公約数を持たないから」（予想）	机間指導
言語表現的活動		出来た班に発表指示する 「予想」を板書する	予想の確認	
	１５分	設問２「予想の証明を考えてみよう」 七の段で考えてみる 説明１　数を文字式で表わす 10進数の文字式表現（板書） $N=10\times A+B \quad 0\leqq A,B\leqq 9$	文字式で考える意義を理解する	
応用的活動		問２　36はどうなるか？	数の表現を例で考える $36=3\times 10+6$	
		問３　７の倍数を式で表そう ヒント ７の倍数を２つ考える	７の倍数は７mとなる $7m=10p+a \quad 0\leqq a\leqq 9$ $7n=10q+b \quad 0\leqq b\leqq 9$	

		n ≦ mと仮定		
	１５分	設問３「何がいえれば証明できたことになるか」	「m ≠ n ならば、a ≠ b」がいえればよい。	
探求的活動		ヒント ２つの式の変形 説明２ 整数の性質を活用する 式の意味を考える ７Aが 10 の倍数ならばAは 10 の倍数となる（板書）	班ごとに考察・議論 7(m－n)=10(p－q)+(a－b) もし、a=b なら　m-n は 10 の倍数になる　m≦9 だから 0≦m－n＜9 したがって m－n =0　m=n　矛盾 証明終わり	机間指導
言語表現活動		できた班に発表を指示 質疑・応答	指名された班が板書発表する 議論・考察	
まとめ	５分	生徒の板書を再び説明し確認 板書事項で本時のまとめを行う	ノートに整理する	
振り返り		宿題の提示 ・一、三、九の段の証明 ・次時の予告	「振り返りシート」に記入 学習評価の項目	振り返りシート配布
授業評価・学習評価の観点	（授業評価） ・数学的活動の目的に沿った活動ができるよう努めたか ・数学の考えを文字式で表現し、式変形して問題解決できるよう努めたか ・言語表現において、発表・議論・質疑応答が適切に行われるよう努めたか ・整数の性質を活用して課題を解決させるよう努めたか （学習評価） ・数学への関心・意欲・態度：数の持つ不思議さに興味をもったか、文字式で表現す るよさを実感したか ・数学的な見方や考え方：整数の性質を活用して式の意味を考察できたか ・数学的な技能：10 進数の表現や文字式の変形ができたか ・数量や図形などについての知識・理解：10 進数や整数の性質を理解しているか			