高校数学の微積分の実践としてのKeplerの法則の証明

松　井　伸　也

北海道情報大学

Proof of Kepler's planetary laws via applying the high school calculus

Shin'ya MATSUI

Hokkaido Information University

平成28年３月

北海道情報大学紀要　第27巻　第２号別刷

〈研究ノート〉

高校数学の微積分の実践としての Kepler の法則の証明

松井 伸也*

Proof of Kepler's planetary laws via applying the high school calculus

Shin'ya MATSUI*

要旨

高校数学で学ぶ微積分の定理は，大学で行う１変数の微積分の内容と基本的に遜色ない．大学では議論に不確実さがないように定理を証明するが，高校ではそれは難しい．それにも関わらず，高校の微積分での議論にある程度目をつぶれば，それを応用し，本来の微積分の目的である「解析」が行える．本稿ではその実践として Kepler の法則の証明を行う事を目的とする．

キーワード

数学教育，微分積分の実践教育，常微分方程式，Kepler の法則，Newton の万有引力の法則，線形代数

1.　はじめに

高校数学で学ぶ微積分の定理は，大学で行う１変数の微積分法と基本的に遜色ない．大学では議論に不確実さがないように定理を証明し，様々な定理を使う上での検証の必要性を説く．高校で同じことを行うのは難しいにも関わらず，ある程度の部分の議論に目をつぶれば，高校で学ぶ微積分は合成関数の微分法を含み（[4]）微積分の本来の目的である「解析」が行える．高校で扱う微積分の応用は，グラフ・不等式程度であるが，それらを教える教員は，如何なる仮定・定義・定理がその応用に含まれているかを常に説明できることが必要である．どの様な数学的内容にもそのバックボーンには，何らかの仮定・定義があり，それらを下に証明がある．授業等でそれらを逐一説明する必要はないと思うが，数学科教育を行う立場では常に心にとめておく必要がある．本稿では，数学科教育の一つの実践として，仮定・定義・定理を明確にし解析を行う場合，どの様な記述になるかを明確に示すことを目的とする．具体的な解析対象として，ベクトル，グラフの極形式 1) などを使い内容の豊富な Kepler の法則の証明を行う．

Johannes Kepler（1571–1630）が与えた惑星の運動を表す法則（ Kepler の法則）は，Tycho Brahe（1546–1601）による火星の観測結果を元に得られたことは，よく知られている．この Kepler の法則は，Issac Newton（1643–1727）による運動方程式と万有引力の法則を用いることにより初等的に証明が可能である．この証明は，Newton 本人がその著「プリンキピア」（Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica）（[5]） で行っており，その逆，即ち，Kepler の法則から万有引力の法則が導かれるという解析も行っている．この辺の事情は，Vladimir I. Arnold（1937–2010）の著書（[1]）に詳しい．なお [1] にも軌道が楕円になる我々とは異なる証明が載っている．また，KAM 理論 2) として知られる軌道の安定性の理論への歴史としては，[3] をお勧めする．

本稿で取り扱う惑星と太陽の関係は，図１のような場合に限ることにする．

*　北海道情報大学　情報メディア学部教授
Professor, Faculty of Information Media, HIU

1)　グラフ上の点 P の原点 O からの距離を r とし，ベクトル $\overrightarrow{OP}$ が x 軸の正の部分とのなす角を θ としたとき，$r = f(\theta)$ という形式でグラフを表現する方法である．

2)　Andrei N. Kolmogorov(1903–1987)，Vladimir I. Arnold，Jürgen K. Moser（1928–1999）

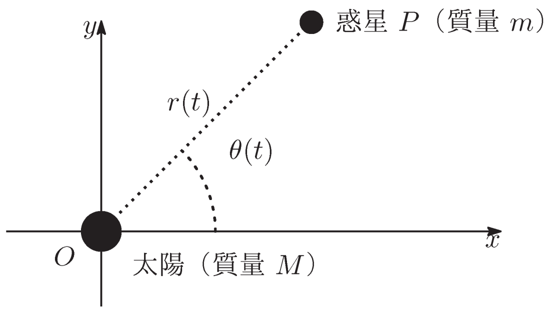

図 1 問題設定

この図 1 では，太陽 O（原点）と惑星 P を大きさのある物体として描いているが，これはわかりやすく表現しただけである．太陽と惑星はそれぞれ質点（質量を持つ点）とし，それぞれの質量を $M>0$，$m>0$ とする．本稿では，高校数学程度の内容を仮定するので，そのために次のような設定（仮定）をし，Kepler の法則の証明を行う．

仮定 1.
- 太陽は動かない．即ち $M>>m$ [3] を仮定する．
- 惑星は太陽を含む平面上を運動する．
- 惑星の運動は時刻 t のみで決まり，初期時刻を $t=0$ とする．

質点 P の位置を解析するために，図 1 のように 時刻 t での 質点 P の極座標を設定する．OP の距離を $r(t)$ とし，x 軸の正の部分と線分 OP とのなす角を $\theta(t)$ とする．この二つの関数 $r(t)$ と $\theta(t)$ が本来ならば未知関数（求めるべき関数）である．即ち $r(t)$ と $\theta(t)$ の満たす何らかの方程式（後述）から，その存在を証明すべき関数達である．しかし高校の解析学の範囲を逸脱するので，解の存在は仮定する．さらに存在を仮定した解の解析をするためには，何らかの「滑らかさ（微分可能性）」は，必要である．必要とする微分可能性を次の仮定で与える．

仮定 2.
関数 $r(t)$ と $\theta(t)$ は，$t\geq 0$ において C^2 級である [4]．

Kepler の法則を与えておこう．なお正確な定式化，言葉の定義などは次節に譲る．

第 1 法則　惑星は，太陽を 1 つの焦点とする楕円軌道を描く．

第 2 法則　惑星の面積速度は一定である．

第 3 法則　惑星の公転周期の 2 乗は，軌道の長半径の 3 乗に比例する．

2. Kepler の法則と証明の準備

Kepler の法則を定式化し，それを証明するための準備をこの章で行う．時刻 t での惑星の位置を $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ とおくと [5]

$$\begin{cases} x(t)=r(t)\cos\theta(t) \\ y(t)=r(t)\sin\theta(t) \end{cases} \tag{1}$$

であるから，仮定 2 から $x(t)$ と $y(t)$ は $t\geq 0$ で共に C^2 級である．

ここでベクトルに関して，一般的な事項をまとめておこう．なお $f'(t)$ は，時間 t の関数 $f(t)$ の微分を表すことにする．

定義 1. (i) 平面上のベクトル $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ と $\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ の内積 $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}$ を $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}=x_1y_1+x_2y_2$ と定義し，$||\boldsymbol{x}||=\sqrt{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}}$ とおく．なお $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}=0$ であるとき $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ は直交するといい，$\boldsymbol{x}\perp\boldsymbol{y}$ と書く．

(ii) 平面上のベクトル $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ が $||\boldsymbol{x}||=||\boldsymbol{y}||=1$ かつ $\boldsymbol{x}\perp\boldsymbol{y}$ を満たすとき，$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ を正規直交基底であるという．

(iii) C^1 級のベクトル [6] $\boldsymbol{P}(t)=\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ に対し，

$$\boldsymbol{P}'(t)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\boldsymbol{P}(t+h)-\boldsymbol{P}(t)\right)$$

とする [7]．高階の微分についても同様に定義する．

(iv) 平面上の質点 P の位置ベクトルが $\boldsymbol{P}(t)$ であるとき，ベクトル $\boldsymbol{P}'(t)$ およ

[3] 記号 $a>>b$ は，a は b に比べて遥かに大きい事を表す．

[4] 関数が $t\geq 0$ において C^m 級であるとは，$t\geq 0$ において連続かつ m 階微分可能であり，その m 階導関数も連続である，ことをいう．

[5] 本稿では一般的な数学的表記に合わせて，ベクトルを列ベクトルで表すことする．なお，すべての成分が，C^m 級であるとき，そのベクトルを C^m 級であるという．

[6] 本来ならベクトル場というべきであるが，本稿では単にベクトルとよぶ．

[7] ベクトル $F(t)$ と F に対し $\lim_{t\to a}F(t)=F$ であるとは，$\lim_{t\to a}||F(t)-F||=0$ を満たすことをいう．

び $\boldsymbol{P}''(t)=(\boldsymbol{P}'(t))'$ をそれぞれ質点 P の速度ベクトル，加速度ベクトルとよぶ．

本稿を通して必要な正規直交基底は

$$\boldsymbol{R}(t)=\begin{pmatrix}\cos\theta(t)\\ \sin\theta(t)\end{pmatrix},\boldsymbol{\Theta}(t)=\begin{pmatrix}-\sin\theta(t)\\ \cos\theta(t)\end{pmatrix}$$

であり，$\boldsymbol{R}(t)$ を半径方向の単位ベクトルとよび，それに直交する $\boldsymbol{\Theta}(t)$ を偏角方向の単位ベクトルとよぶことにする．本稿で必要な微分に関する事実を述べよう．

補題 1. ベクトル $\boldsymbol{F}(t)=\begin{pmatrix}f(t)\\ g(t)\end{pmatrix}$ を C^1 級とし，仮定 2 を仮定する．

(i) $\boldsymbol{F}'(t)=\begin{pmatrix}f'(t)\\ g'(t)\end{pmatrix}$ である．

(ii) C^1 級の関数 $k(t)$ にたいして

$$\frac{d}{dt}\left(k(t)\boldsymbol{F}(t)\right)=k'(t)\boldsymbol{F}(t)+k(t)\boldsymbol{F}'(t)$$

が成立する．

(iii) $\boldsymbol{R}'(t)=\theta'(t)\boldsymbol{\Theta}(t)$, $\boldsymbol{\Theta}'(t)=-\theta'(t)\boldsymbol{R}(t)$.

(iv) $\boldsymbol{P}(t)=r(t)\boldsymbol{R}(t)$.

(v) $\boldsymbol{P}'(t)=r'(t)\boldsymbol{R}(t)+r(t)\theta'(t)\boldsymbol{\Theta}(t)$.

(vi) $\boldsymbol{P}''(t)=\left(r''(t)-r(t)\left(\theta'(t)\right)^2\right)\boldsymbol{R}(t)+ + \left(2r'(t)\theta'(t)+r(t)\theta''(t)\right)\boldsymbol{\Theta}(t)$.

証明 (i) を示す．$\boldsymbol{A}(t)=\begin{pmatrix}f'(t)\\ g'(t)\end{pmatrix}$ とおく．

$$\begin{aligned}&\frac{1}{h}\left(\boldsymbol{F}(t+h)-\boldsymbol{F}(t)\right)-\boldsymbol{A}(t)\\ &=\begin{pmatrix}\dfrac{f(t+h)-f(t)}{h}-f'(t)\\ \dfrac{g(t+h)-g(t)}{h}-g'(t)\end{pmatrix}\end{aligned}$$

よって各成分の微分可能性より，

$$\lim_{h\to0}\left\|\frac{1}{h}\left(\boldsymbol{F}(t+h)-\boldsymbol{F}(t)\right)-\boldsymbol{A}(t)\right\|=0$$

である．(ii) はベクトルの各成分ごとに積の微分法を使えば良い．(iii) を示す．合成関数の微分法を使うと

$$\begin{aligned}\boldsymbol{R}'(t)&=\begin{pmatrix}\{\cos\theta(t)\}'\\ \{\sin\theta(t)\}'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\theta'(t)\sin\theta(t)\\ \theta'(t)\cos\theta(t)\end{pmatrix}\\ &=\theta'(t)\begin{pmatrix}-\sin\theta(t)\\ \cos\theta(t)\end{pmatrix}=\theta'(t)\boldsymbol{\Theta}(t)\end{aligned}$$

を得る．後半も同様に証明すれば良い．(iv) は (1) から明らかである．(v) を示そう．煩雑さを避けて，時間 t への依存を示す (t) を省略する．(ii)，(iii) と (iv) より

$$\begin{aligned}\boldsymbol{P}'&=(r\boldsymbol{R})'=r'\boldsymbol{R}+r\boldsymbol{R}'\\ &=r'\boldsymbol{R}+r\theta'\boldsymbol{\Theta}.\end{aligned}$$

同様に (vi) を示す．

$$\begin{aligned}\boldsymbol{P}''&=(r'\boldsymbol{R}+r\theta'\boldsymbol{\Theta})'\\ &=r''\boldsymbol{R}+r'\boldsymbol{R}'+r'\theta'\boldsymbol{\Theta}+r\theta''\boldsymbol{\Theta}+r\theta'\boldsymbol{\Theta}'\\ &=r''\boldsymbol{R}+r'\cdot\theta'\boldsymbol{\Theta}+r'\theta'\boldsymbol{\Theta}+r\theta''\boldsymbol{\Theta}\\ &\qquad+r\theta'\cdot(-\theta'\boldsymbol{R})\\ &=\left(r''-r(\theta')^2\right)\boldsymbol{R}+(2r'\theta'+r\theta'')\boldsymbol{\Theta}\end{aligned}$$

証明すべきことは以上である．

Keplerの定理を記述する上で必要な楕円（図2）の極表示を計算しよう．なお数学IIIで取り扱う内容である．証明は必要ないと思われるが，参考までに与えておこう．

補題 2. (i) 原点と点 $F_2=(-2l,0)$ を焦点とする楕円の極表示は

$$r=\frac{A^2-l^2}{A+l\cos\theta}$$

である．ただし $A>l$ は正の定数であり，この楕円の中心は $C=(-l,0)$ である．

(ii) 焦点を含む軸で $||\overrightarrow{CP_a}||$ を長半径とし，短半径を $||\overrightarrow{CP_b}||$ とする．このとき長半径 $=A$，短半径 $=\sqrt{A^2-l^2}$ である．

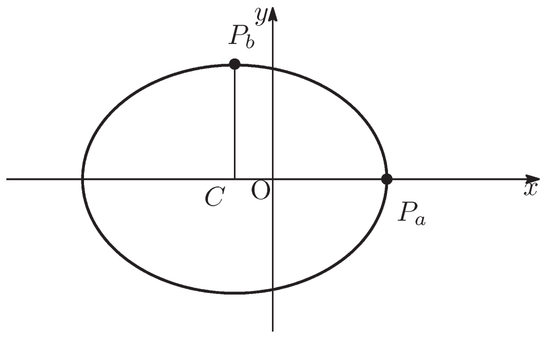

図 2 楕円

証明 (i) を示そう．焦点を F_1，F_2 とする楕円上の点 P は $||\overrightarrow{F_1P}||+||\overrightarrow{F_2P}||=2A$ を満たす．ただし $A>l$ であった．さて我々の設定では $F_1=(0,0)$，$F_2=(-2l,0)$ なので $P=(r\cos\theta,r\sin\theta)$ とおくと（$0\le r\le 2A$）

$$\begin{aligned}||\overrightarrow{F_1P}||&=\sqrt{(r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2}=r,\\ ||\overrightarrow{F_2P}||&=\sqrt{(r\cos\theta+2l)^2+(r\sin\theta)^2}\\ &=\sqrt{r^2+4rl\cos\theta+4l^2}\end{aligned}$$

であるから $\sqrt{r^2+4rl\cos\theta+4l^2}=2A-r$ を得るが，右辺は 0 以上なので両辺を 2 乗し，まとめると

$$r=\frac{A^2-l^2}{A+l\cos\theta}$$

を得る．次に (ii) を示す．$P_a=(\alpha,0)$ とおき，$P_b=(-l,\beta)$ とおく．ここで α と β は正で求めるべき値である．

α の値を計算する．$||\overrightarrow{F_1P_a}||=\alpha$, $||\overrightarrow{F_2P_a}||=2l+\alpha$ であるから，$\alpha+(2l+\alpha)=2A$ である．よって

$$\alpha=A-l$$

を得る．β の値を計算する．三平方の定理を使うと $||\overrightarrow{F_1P_b}||=||\overrightarrow{F_2P_b}||=\sqrt{\beta^2+l^2}$ であるから，$2\sqrt{\beta^2+l^2}=2A$ である．よって

$$\beta=\sqrt{A^2-l^2}$$

を得た．よって長半径 $=\alpha+l=A$，短半径 $=\beta=\sqrt{A^2-l^2}$ を得た．証明終わり．

なお 長半径 $>$ 短半径であり，離心率は

$$e=\sqrt{1-\frac{||\overrightarrow{CP_b}||^2}{||\overrightarrow{CP_a}||^2}}=\frac{l}{A}$$

である．

Kepler の法則にある面積速度の計算を与えよう．1 変数の積分による計算は少々煩雑になるので，ここでは重積分の計算を与える．故に高校の数学を逸脱する．1 変数の積分による計算も高校の微積分の範囲を超える．どちらにしても，仮定しなくてはいけない数学的事実となる．ここでも参考までに，証明を与えることにしよう．

補題 3. 極形式 $r=f(\theta)$ で与えられる曲線を考える．ただし $f(\theta)$ は θ に関して連続であるとする．このとき，この曲線が $\theta_0\le\theta\le\theta_1$ を満たす部分と 2 直線 $y=(\tan\theta_0)\,x, y=(\tan\theta_1)\,x$ で囲まれる領域 D の面積 S は

$$S=\frac{1}{2}\int_{\theta_0}^{\theta_1}\left(f(\tau)\right)^2\ d\tau$$

である．

証明 極座標変換を使う．なお $E=\{(r,\theta)|0\le r\le f(\theta),\theta_0\le\theta\le\theta_1\ \}$ である．

$$\begin{aligned} S &= \int\int_D 1dxdy=\int\int_E rdrd\theta \\ &= \int_{\theta_0}^{\theta_1}\left(\int_0^{f(\theta)} rdr\right)d\theta \\ &= \int_{\theta_0}^{\theta_1}\frac{1}{2}\left(f(\theta)\right)^2 d\theta. \end{aligned}$$

よって，面積が計算された．

定義 2. 惑星が太陽の周りをまわる軌道が極形式 $r(t)=f(\theta(t))$ と書けるとする．さらに $\theta(t)$ は単調増加関数であるとする．初期時刻 $t=0$ から時刻 t の間に，太陽と惑星を結ぶ直線が作る領域の面積を $S(t)$ とおく．このとき $S'(t)$ を惑星の面積速度という．

存在を仮定した $\theta(t)$ は，$\theta'(t)$ がどのような値をとっても微分方程式の問題としては成立する．しかし惑星の動きを考えると任意の $t\ge0$ に対して $\theta'(t)>0$ または $\theta'(t)<0$ となるべきであろう．この単調性は，解 $\theta(t)$ に仮定するか，もしくは何らかの仮定の下で証明する必要がある．我々は $\theta(t)$ の初期値に仮定を与え，$\theta'(t)>0$ を証明することとする．なお単調性の証明は後ほど行い，次の補題では $\theta(t)$ の単調性を仮定し，面積速度 $S'(t)$ を計算しよう．

補題 4. 惑星が太陽の周りをまわる軌道が極形式 $r(t)=f(\theta(t))$ と書けるとする．さらに $f(\theta)$ の連続性を仮定し，$\theta(t)$ は $t\ge0$ で，C^1 級とし，$\theta'(t)>0$ または $\theta'(t)<0$ を仮定する．このとき

$$S'(t)=\frac{1}{2}\left[f(\theta(t))\right]^2\cdot|\theta'(t)|$$

である．

証明 補題 3 より $\theta'(t)>0$ のときは

$$S(t)=\frac{1}{2}\int_{\theta(0)}^{\theta(t)}\left(f(\tau)\right)^2 d\tau$$

である．なお $\theta'(t)<0$ のときは

$$S(t)=-\frac{1}{2}\int_{\theta(0)}^{\theta(t)}\left(f(\tau)\right)^2 d\tau$$

である．以下 $\theta'(t)>0$ のときの計算をしよう．$\theta'(t)<0$ のときも同様である．さて微積分の基本定理

$$G(x)=\int_a^x g(\tau)d\tau\Rightarrow G'(x)=g(x)$$

が成立する．ここで $g(\tau)$ は $a \leq \tau \leq x$ で連続である．よって

$$H(x) = \frac{1}{2}\int_{\theta(0)}^{x} (f(\tau))^2 \, d\tau \Rightarrow H'(x) = \frac{1}{2}(f(x))^2$$

である．故に合成関数の微分法を使うと

$$S'(t) = H'(\theta(t)) \cdot \theta'(t) = \frac{1}{2}\left[f(\theta(t))\right]^2 \cdot \theta'(t)$$

以上で補題を得た．

準備が整ったので，Kepler の法則の定式化を行う．なお公転周期とは，惑星が太陽の周りを 1 周するのに要する時間である．

Kepler の法則

1st law ある正定数 A と l（$A > l$）が存在し，

$$r(t) = \frac{A^2 - l^2}{A + l\cos\theta(t)}$$

が成立する．

2nd law 面積速度 $S'(t)$ は定数である．

3rd law 惑星の公転周期を T とし，長半径を R_a する．このとき $T^2/(R_a)^3$ は，惑星 P に依存しない定数である．

この法則を Newton の万有引力の法則を使い証明するわけである．平面上の力学[8] について，必要なことを述べておこう．

力学について

運動方程式 平面上を動く質点 P（質量 $m > 0$）の時刻 t での位置（ベクトル）を $\boldsymbol{P}(t)$ とおく．このとき点 P に加わる力（ベクトル）を $\boldsymbol{F}$ とすると

$$m\boldsymbol{P}''(t) = \boldsymbol{F}$$

が成立する．

万有引力の法則 質量 $M > 0$，$m > 0$ の二つの物体は引き合う．その力の大きさは，二つの物体間の距離を R とすると

$$\frac{GMm}{R^2}$$

である．ただし $G > 0$ は万有引力定数である．

[8] 以下の話は平面に限ったことではない．

3. 惑星が満たす方程式と必要な仮定

前節の計算結果などから，惑星 P の位置ベクトル $\boldsymbol{P}(t)$ が満たす方程式を導出する．万有引力の法則と運動方程式から，次の常微分方程式を得る．初期値に関しては，後述する．また数学の慣例に従って，関数 $f(t)$ にたいして，$(f(t))^m$ を $f^m(t)$ と書くことにする．

$$m\boldsymbol{P}''(t) = -\frac{GMm}{r^2(t)}\boldsymbol{R}(t) \quad \text{for } t > 0. \quad \text{(e1)}$$

ただし，力の向きは外向きを正とした．この方程式を補題 1 を使い，$\boldsymbol{\Theta}(t)$ と $\boldsymbol{R}(t)$ の成分の方程式に書き換えよう．(e1) の左辺は

$$m\left(r''(t) - r(t)\left(\theta'\right)^2(t)\right)\boldsymbol{R}(t) \\ + m\left(2r'(t)\theta'(t) + r(t)\theta''(t)\right)\boldsymbol{\Theta}(t)$$

であった．また $\boldsymbol{R}(t)$ と $\boldsymbol{\Theta}(t)$ は正規直交基底であるので，実数 α_R，α_θ，β_R，β_θ にたいして，

$$\alpha_R\boldsymbol{R}(t) + \alpha_\theta\boldsymbol{\Theta}(t) = \beta_R\boldsymbol{R}(t) + \beta_\theta\boldsymbol{\Theta}(t)$$

が成立する為の必要十分条件は，$\alpha_R = \beta_R$ かつ $\alpha_\theta = \beta_\theta$ であることは容易に分かる[9]．よって (e1) より $t > 0$ のとき

$$m\left(r''(t) - r(t)\left(\theta'\right)^2(t)\right) = -\frac{GMm}{r^2(t)} \quad \text{(e2)}$$

$$m\left(2r'(t)\theta'(t) + r(t)\theta''(t)\right) = 0 \quad \text{(e3)}$$

を得る．さて積の微分法を使うと

$$\begin{aligned} & r(t)\left(2r'(t)\theta'(t) + r(t)\theta''(t)\right) \\ &= 2r(t)r'(t)\theta'(t) + (r(t))^2\theta''(t) \\ &= \left\{r^2(t)\right\}'\theta'(t) + r^2(t)\left(\theta'(t)\right)' \\ &= \left\{r^2(t)\theta'(t)\right\}' \end{aligned}$$

よって (e2) および (e3) $\times r(t)$ より，未知関数 $r(t)$ と $\theta(t)$ にたいする初期値問題を得る．この極形式の方程式が，我々に必要な最終的な形である．なお時間 t の関数であることを示す (t) は省略した．ただし $B > 0$，$b > 0$ は定数である．

$$\begin{cases} m\left(r'' - r\left(\theta'\right)^2\right) = -\dfrac{GMm}{r^2} \quad \text{for } t > 0 & \text{(E1)} \\ \left(r^2\theta'\right)' = 0 \quad \text{for } t > 0 & \text{(E2)} \\ r(0) = B,\ \theta(0) = 0 & \text{(E3)} \\ r'(0) = 0,\ \theta'(0) = b & \text{(E4)} \end{cases}$$

[9] 両辺に $\boldsymbol{R}(t)$ と $\boldsymbol{\Theta}(t)$ を内積すればよい

この連立常微分方程式系にたいする初期値問題 (E1), (E2), (E3), (E4) に次を仮定する．以下この問題を (E) と書く．この初期問題の解の構成は本稿の目的ではない．あくまで Kepler の法則を示すことにある．故に本稿では，次は仮定しよう．

仮定 3. 初期値問題 (E) は，$t \geq 0$ で C^2 級の 1 意的な解（古典解という）をもつ．

この仮定では，特に「解の 1 意性」が重要である．「解の 1 意性」が成立しないと，例えば惑星の軌道を計算してもそれ以外の軌道は無いという保証ができないからである．

この仮定 3 と (E) から，惑星の位置ベクトル $\boldsymbol{P}(t)$ の初期値は

$$\boldsymbol{P}(0) = \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{P}'(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ Bb \end{pmatrix}$$

である．

4. Kepler の定理の証明

本節で次の定理を証明しよう．

定理 1. 仮定 3 を仮定し，初期値にたいして $B^3b^2 < 2GM$ を仮定する．このとき (E) の解 $r(t)$ と $\theta(t)$ は，Kepler の法則を満たす．

次の補題は，定理を証明するために重要な役割を果たす．

補題 5. すべての $t \geq 0$ にたいし，次が成立する．

(i) $r^2(t)\theta'(t) = B^2b$.

(ii) $r(t) > 0$ かつ $\theta'(t) > 0$.

証明 $t \geq 0$ を任意にとる．方程式 (E2) と初期条件 (E3) と (E4) から，(i) は直ちにしたがう．またこれより $B^2b > 0$ なので，$r^2(t)\theta'(t) > 0$ である．よって $r(t) \neq 0$ かつ $\theta'(t) > 0$ を得る．よって (ii) の後半も証明された．最後に $r(t) > 0$ を示そう．初期条件 $r(0) = B > 0$ であり，仮定 3 より $r(t)$ は $t \geq 0$ で連続である．ある時刻 $t_0 > 0$ が存在して $r(t_0) < 0$ を満たすとしよう．すると中間値の定理から $r(t_1) < 0$ を満たすある時刻 t_1（ $0 < t_1 < t_0$ ）が存在する．これは先に示した $r(t) \neq 0$ に反する．よってすべての $t \geq 0$ にたいして，$r(t) > 0$ である．以上である．

つぎに $r(t) = f(\theta(t))$ となる関係があるか否かを計算しよう．Kepler の法則 1st law の証明を行いたい．

命題 1. (1) 初期値が $2GM > B^3b^2$ を満たすとき，ある定数 A と l $(0 < l < A)$ が存在して

$$r(t) = \frac{A^2 - l^2}{A + l\cos\theta(t)}$$

を満たす．

(2) 定数 A と l は，次で与えられる．

$$A = \frac{BGM}{2GM - B^3b^2}, \; l = \frac{B^4b^2 - BGM}{2GM - B^3b^2}.$$

証明 $r(t) = f(\theta(t))$ となる $f = f(p)$ が存在するか否かを $f(p)$ の方程式を作り解析しよう．

(E1) から

$$r''(t) - r(t)\left(\theta'\right)^2(t) + \frac{GM}{r^2(t)} = 0 \qquad (2)$$

である．この式に $r(t) = f(\theta(t))$ を代入し，合成関数の微分法を使い計算しよう．時間変数 t の微分 $\dfrac{d}{dt}$ と区別するため，関数 $f(p)$ の変数 p に関する微分 $\dfrac{df}{dp}(p)$ を $\dot{f}(p)$，$\dfrac{d^2f}{dp^2}(p)$ を $\ddot{f}(p)$ で表す．補題 5 の (i) から，

$$\theta'(t) = \frac{B^2b}{r^2(t)} = \frac{B^2b}{f^2(\theta(t))} \qquad (3)$$

である．よって

$$r(t)(\theta')^2(t) = \frac{B^4b^2}{f^3(\theta(t))}$$

を得る．同様に (3) を使うと

$$\begin{aligned} r'(t) \; &= \dot{f}(\theta(t)) \cdot \theta'(t) \\ &= B^2b\frac{\dot{f}(\theta(t))}{f^2(\theta(t))} \\ &= -B^2b\,\frac{d}{dp}\left(\frac{1}{f(p)}\right)\Bigg|_{p=\theta(t)} \end{aligned}$$

が成立するので

$$r'(t) = -B^2b\,\frac{d}{dp}\left(\frac{1}{f(p)}\right)\Bigg|_{p=\theta(t)} \qquad (4)$$

を得る．ここで $\dfrac{d}{dp}\left(F(p)\right)\Big|_{p=\theta}$ は，$F(p)$ を微分した後で $p = \theta$ を代入することを表す．

さらに (4) を t で微分し，(3) を使うと

$$\begin{aligned} r''(t) \; &= -B^2b\,\frac{d^2}{dp^2}\left(\frac{1}{f(p)}\right)\Bigg|_{p=\theta(t)} \cdot \theta'(t) \\ &= -\frac{B^4b^2}{f^2(\theta(t))} \cdot \frac{d^2}{dp^2}\left(\frac{1}{f(p)}\right)\Bigg|_{p=\theta(t)} \end{aligned}$$

を得る．よって (2) は

$$-\frac{B^4b^2}{f^2(\theta(t))}\cdot\frac{d^2}{dp^2}\left(\frac{1}{f(p)}\right)\Bigg|_{p=\theta(t)}-\frac{B^4b^2}{f^3(\theta(t))}+ +\frac{GM}{f^2(\theta(t))}=0$$

となる．この両辺に $f^2(\theta(t))/(B^4b^2)$ をかけてまとめると

$$\left(\frac{d^2}{dp^2}\left(\frac{1}{f(p)}\right)+\frac{1}{f(p)}\right)\Bigg|_{p=\theta(t)}=\frac{GM}{B^4b^2}$$

を得る．さて補題 5 (ii) と 初期条件より，$\theta'(t)>0$ かつ $\theta(0)=0$ である．よって $\theta(t)$ は 0 以上の任意の実数を値としてもつ．以上の議論から，未知関数 $f(p)$ は $p\geq 0$ で

$$\frac{d^2}{dp^2}\left(\frac{1}{f(p)}\right)+\frac{1}{f(p)}=\frac{GM}{B^4b^2} \qquad (5)$$

を満たすことが分かった．$\theta(t)$ の単調性と $\theta(0)=0$ から $\theta(t)=0 \iff t=0$ である．よって

$$f(0)=f(\theta(0))=r(0)=B$$

を得る．さらに $\dot{f}(0)=\dot{f}(\theta(0))$ なので，(4) より

$$\dot{f}(0)=\frac{f^2(0)\cdot r'(0)}{B^2b}=0,$$
$$\left(\dot{\frac{1}{f}}\right)(0)=\frac{-\dot{f}(0)}{f^2(0)}=0$$

である．よって $1/f(p)$ の初期条件は，

$$\frac{1}{f(0)}=\frac{1}{B},\quad \left(\dot{\frac{1}{f}}\right)(0)=0 \qquad (6)$$

である．この 2 階常微分方程式の初期値問題 (5), (6) は，比較的に簡単に解ける [10]．結果を認めても良いであろう．簡単に述べよう．$\dfrac{1}{f(p)}$ の方程式とみて定係数 2 階常微分方程式である方程式 (5) の特性方程式は

$$\lambda^2+1=0$$

であり，特性根は $\lambda=\pm\sqrt{-1}$ である．よって基本解として $\cos p$ と $\sin p$ がとれる [11]．よって

$$\frac{1}{f(p)}=\alpha\cos p+\beta\sin p+\gamma$$

とおいて，初期値問題 (5)，(6) の解になるように定数 α，β，γ を決定すると

$$\frac{1}{f(p)}=\left(\frac{1}{B}-\frac{GM}{B^4b^2}\right)\cos p+\frac{GM}{B^4b^2} \qquad (7)$$

を得る．よって

$$f(p)=\frac{1}{\left(\frac{1}{B}-\frac{GM}{B^4b^2}\right)\cos p+\frac{GM}{B^4b^2}}=\frac{B^4b^2}{GM+(B^3b^2-GM)\cos p}$$

となるが，分母と分子に $\dfrac{B}{2GM-B^3b^2}$ をかけ

$$f(p)=\frac{\frac{B^5b^2}{2GM-B^3b^2}}{\frac{BGM}{2GM-B^3b^2}+\left(\frac{B^4b^2-BGM}{2GM-B^3b^2}\right)\cos p}$$

と変形する．ここで

$$A=\frac{BGM}{2GM-B^3b^2},\, l=\frac{B^4b^2-BGM}{2GM-B^3b^2} \qquad (8)$$

とおくと

$$\begin{aligned}A^2-l^2&=(A-l)(A+l)\\&=\frac{2BGM-B^4b^2}{2GM-B^3b^2}\times\frac{B^4b^2}{2GM-B^3b^2}\\&=\frac{B^5b^2(2GM-B^3b^2)}{(2GM-B^3b^2)^2}\\&=\frac{B^5b^2}{2GM-B^3b^2}\end{aligned}$$

が成立する．初期値の仮定 $2GM-B^3b^2>0$ により，明らかに $0<l<A$ であり，

$$f(p)=\frac{A^2-l^2}{A+l\cos p}$$

を満たす．解 $r(t)$ と $\theta(t)$ は一意であったから，以上で命題 1 即ち 1st law が示された．

参考までに，(5) から次が従う．高校数学 III の範囲で理解ができるので，詳細は割愛する．

- 初期値が $2GM=B^3b^2$ を満たすとき

$$f(p)=\frac{2B}{1+\cos p}$$

を満たす．極表示で $r=2B/(1+\cos\theta)$ となる曲線は，原点を焦点とする放物線を表す．

- 初期値が $2GM<B^3b^2$ を満たすとき，(8) において $\alpha=-A>0$ と $\mu=-l>0$

[10] 例えば [2] 等.
[11] $e^{\pm\sqrt{-1}p}$ としても良い.

とおく．このとき，$0 < \alpha < \mu$ であり

$$f(p) = \frac{\mu^2 - \alpha^2}{\alpha + \mu \cos p}$$

を満たす．極表示で $r = (\mu^2 - \alpha^2)/(\alpha + \mu \cos p)$ となる曲線は，原点を一つの焦点とする双曲線を表す．

さて，Kepler の法則の証明にもどろう．命題 1 の証明と補題 2 (ii) から，次の補題が直ちに従う．

補題 6. 惑星の軌道の 長半径 R_a と短半径 R_b は，次で与えられる．

$$R_a = \frac{BGM}{2GM - B^3b^2}, R_b = \sqrt{\frac{B^5b^2}{2GM - B^3b^2}}.$$

$\theta(t)$ が単調増加関数（補題 5 (ii)）で，軌道が極表示ができることが分かった（命題 1）．さらに補題 4 を使い Kepler の法則の 2nd law を証明しよう．

命題 2. 面積速度 $S'(t)$ は

$$S'(t) = \frac{1}{2}B^2b$$

である．

証明　補題 5 (ii）と命題 1）から，補題 4 の仮定が成立することが分かる．よって補題 5 (i）から

$$S'(t) = \frac{1}{2}f^2(\theta(t))\theta'(t) = \frac{1}{2}r^2(t)\theta'(t) = \frac{1}{2}B^2b$$

が成立し，命題は証明される．即ち 2nd law が示された．

最後に 3rd law の証明を行う．最初に惑星 P の公転周期 T_P を計算する．

補題 7. 惑星 P が描く楕円の長半径を R_a，短半径を R_b とする．このとき，P が太陽の周りを 1 周するに要する公転周期 T_P は

$$T_P = \frac{2\pi R_a R_b}{B^2b}$$

である．

証明　惑星 が描く楕円の面積は $S_P = \pi R_a R_b$ である．一方，$S_P = S(T_P)$ であるから，補題 4 と 命題 2 より

$$S_P = \int_0^{T_P} S'(\tau)\, d\tau = \int_0^{T_P} \frac{1}{2}B^2b\, d\tau = \frac{1}{2}B^2bT_P$$

である．よって

$$\frac{1}{2}B^2bT_P = \pi R_a R_b$$

である．よって補題を得る．

この公転周期 T_P を使い， 3rd law を証明しよう．

命題 3. 次が成立する．

$$\frac{(T_P)^2}{(R_a)^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$$

である．

証明　補題 7 より

$$\frac{(T_P)^2}{(R_a)^3} = \left(\frac{2\pi R_a R_b}{B^2b}\right)^2 \cdot \frac{1}{(R_a)^3} = \frac{4\pi^2}{B^4b^2} \times \frac{(R_b)^2}{R_a}$$

である．補題 6 より

$$\frac{(R_b)^2}{R_a} = \frac{\dfrac{B^5b^2}{2GM - B^3b^2}}{\dfrac{BGM}{2GM - B^3b^2}} = \frac{B^4b^2}{GM}$$

である．よって

$$\frac{(T_P)^2}{(R_a)^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$$

を得る．よって 3rd law が示された．

5. 最後に

本稿では，Newton の万有引力の法則から Kepler の法則を高校数学の範囲で証明する場合，如何なる仮定が必要かを明確にすること目的とした．この逆，即ち Kepler の万有引力の法則から Newton の法則の高校数学を使った証明も稿を改めて行いたいと思う．

参考文献

[1] Arnold,V., I. 著, 蟹江訳，数理解析のパイオニアたち，シュプリンガー・フェアラーク東京（1999）．

[2] Burghes, D. N. and Borrie, M.S. 著，垣田・大町訳，微分方程式で数学モデルを作ろう，日本評論社（1997）．

[3] Dyak, F. and Holmes, P. 著，吉田訳，天体力学のパイオニアたち 上・下，シュプリンガー・フェアラーク東京（2004）．

[4] 文部科学省，学習指導要領解説 数学編（2009年 11 月）

[5] Newton, I. 著，中野猿人訳，プリンシピア 自然哲学の数学的原理，講談社（1977）